Kapitel 3
Quadratische Formen und symmetrische Matrizen

3.1 Skalarprodukte und Normen

Das übliche Skalarprodukt für Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$ ist folgendermassen erklärt:

$$\langle v, w\rangle = \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle := x_1x_2 + y_1y_2 \, .$$

Die Länge eines Vektors $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, die hier mit $||v||$ notiert wird, ist nach dem Satz von Pythagoras gegeben durch:

$$||v|| = \sqrt{x^2 + y^2} \, .$$

Die geometrische Bedeutung des Skalarprodukts ist folgende: $\langle v, w\rangle$ gibt die Länge der senkrechten Projektion von v auf die Richtung von w, multipliziert mit der Länge von w, an. Bezeichnet α den Winkel zwischen v und w, so gilt:

$$\langle v, w\rangle = ||v|| \cdot ||w|| \cdot \cos\alpha \, .$$

Also ist $\langle v, w\rangle = 0$ genau dann, wenn die Vektoren v und w senkrecht aufeinander stehen. Und es ergibt sich folgendes:

3.1.1 Satz *(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)*

$$|\langle v, w\rangle| \le ||v|| \cdot ||w|| \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn v, w linear abhängig sind.

Dieses “Standardskalarprodukt” ist das Vorbild für den folgenden Begriff:

3.1.2 Definition Ein *Skalarprodukt* auf einem reellen Vektorraum V ist eine Abbildung $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}_{>0}$ für alle $0 \neq v \in V$; $\langle 0, 0\rangle = 0$.

(ii) $\langle u, \alpha v + \beta w\rangle = \alpha\langle u, v\rangle + \beta\langle u, w\rangle$ für alle $u, v, w \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(iii) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ für alle $u, v \in V$.

Jedes Skalarprodukt auf V liefert auch einen Längenbegriff auf V, eine sogenannte *Norm*, nämlich

$$||v|| := \sqrt{\langle v, v\rangle} \quad \text{für alle } v \in V.$$

Wegen der Eigenschaft (i) ist dieser Ausdruck wohldefiniert.

3.1.3 Beispiele 1. Das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist so erklärt:

$$\langle v, w\rangle = \langle \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \rangle = \sum_{k=1}^{n} v_k w_k \,.$$

Die Eigenschaften (i)-(iii) sind erfüllt, wie man direkt nachrechnen kann. Die dazugehörige Länge ist die vertraute euklidische Länge:

$$||v|| = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2} \quad \text{für alle } v \in V.$$

Für $n = 1$ stimmt $||\ ||$ mit dem Betrag überein.

2. Eine andere Möglichkeit, ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ zu erklären, ist zum Beispiel folgende:

$$\langle v, w\rangle = \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = 2x_1x_2 + 3y_1y_2 \,.$$

Auch hier sind die Rechenregeln (i)-(iii) erfüllt, und die zugehörige Norm lautet hier $|| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} || = \sqrt{2x^2 + 3y^2}$. Man kann diese Art der Längenmessung so verstehen, dass wir die x- und die y-Richtung jeweils neu skaliert haben.

3. Sei V der Vektorraum der stetigen, reellwertigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann definiert auch folgende Vorschrift ein Skalarprodukt:

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx \,.$$

Die zugehörige Norm lautet:

$$||f|| = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 \, dx} \,.$$

Die Linearitätseigenschaft (ii) ergibt sich direkt aus der Linearität des Integrals und die Symmetrie (iii) ist offensichtlich. Für (i) ist es wichtig, dass es sich um stetige Funktionen handelt. Ist $f \in C^0[a, b]$, dann ist f^2 eine stetige Funktion mit $f^2(x) \geq 0$ für alle x. Eine nichtnegative, stetige Funktion kann nur dann als Integralwert Null liefern, wenn es sich um die Nullfunktion handelt.

3.1.4 Satz *(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) für jedes Skalarprodukt auf V und die dazugehörige Norm gilt:*

$$|\langle v, w\rangle| \leq ||v|| \cdot ||w|| \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn v, w linear abhängig sind.

In Anlehnung an die geometrische Bedeutung des Standardskalarprodukts des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sagt man, zwei Vektoren $u, v \in V$ seien *senkrecht zueinander* oder *orthogonal*, wenn $\langle v, w\rangle = 0$. Dafür gibt es auch die Notation $v \perp w$.

3.1.5 Definition Eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V heisst *Orthonormalbasis*, falls $v_i \perp v_j$ für alle $i \neq j$ und $||v_j|| = 1$ für alle j. Das heisst anders ausgedrückt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} .$$

Eine Orthonormalbasis liefert also ein rechtwinkliges Koordinatensystem.

Wenn man einen Vektor $v \in V$ durch eine Orthonormalbasis ausdrücken möchte, muss man jeweils die Skalarprodukte von v mit den Basisvektoren bestimmen. Denn es gilt:

3.1.6 Bemerkung *Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V, so gilt für jedes $v \in V$:*

$$v = \sum_{j=1}^{n} \langle v_j, v \rangle v_j .$$

Das Skalarprodukt $\langle v_j, v \rangle$ gibt also jeweils die orthogonale Projektion von v in Richtung von v_j an.

Beweis. Ist $v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$, so gilt $\langle v_j, v \rangle = \langle v_j, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle v_j, v_k \rangle = \alpha_j$. Also stimmt $\langle v_j, v \rangle$ mit dem (eindeutig bestimmten) Koeffizienten α_j überein. q.e.d.

3.1.7 Beispiele

- Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ für $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt.
- $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt. Auch $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Orthonormalbasis. Der Vektor $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Beispiel hat im v_1-v_2-Koordinatensystem die Koordinaten $\tilde{x} = \langle v_1, w \rangle = 3/\sqrt{2}$ bzw. $\tilde{y} = \langle v_2, w \rangle = -1/\sqrt{2}$. Das heisst:

$$w = (3/\sqrt{2}) v_1 - (1/\sqrt{2}) v_2 .$$

3.1.8 Satz *Jeder endlichdimensionale reelle Vektorraum mit Skalarprodukt hat eine Orthonormalbasis.*

Beweis. Dazu startet man mit einer beliebigen Basis $(u_1, \ldots, u_n)$ von V und konstruiert daraus rekursiv mithilfe des Gram-Schmidtschen *Orthonormalisierungsverfahrens* eine Orthonormalbasis $(v_1, \ldots, v_n)$, und zwar so, dass für $k = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{lin}(u_1, \ldots, u_k) .$$

Den ersten Vektor v_1 wählt man parallel zu u_1, aber auf Länge 1 normiert, also $v_1 := \frac{u_1}{||u_1||}$. Um den zweiten Vektor v_2 zu definieren, geht man aus von der Zerlegung von u_2 in eine Komponente in Richtung von v_1 und eine Komponente w von u_2 senkrecht zu v_1. Da $\langle v_1, u_2\rangle$ die Länge der Projektion von u_2 auf v_1 bezeichnet, gilt: $w = u_2 - \langle v_1, u_2\rangle v_1$. Nun wählt man v_2 parallel zu w, aber auf Länge 1 normiert, also $v_2 := \frac{w}{||w||}$. Der dritte Vektor v_3 wird aus u_3 konstruiert, indem man zunächst die Projektionen auf v_1 und v_2 abzieht und dann auf Länge 1 normiert, usw. Hier das Resultat:

$$v_1 := \frac{u_1}{||u_1||}, \qquad v_2 := \frac{u_2 - \langle v_1, u_2\rangle v_1}{||u_2 - \langle v_1, u_2\rangle v_1||},$$

und für $k = 3, \ldots, n$

$$v_k := \frac{u_k - \sum_{j=1}^{k-1}\langle v_j, u_k\rangle v_j}{||u_k - \sum_{j=1}^{k-1}\langle v_j, u_k\rangle v_j||}.$$

Man kann direkt nachrechnen, dass $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis ist. q.e.d.

3.1.9 Beispiel Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ die Ebene, definiert durch die Gleichung $2x+3y-z = 0$, zusammen mit dem von $\mathbb{R}^3$ geerbten Skalarprodukt. Die Vektoren $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ aus V sind linear unabhängig, stehen aber nicht senkrecht aufeinander, denn $\langle u_1, u_2\rangle = 6$. Das Orthonormalisierungsverfahren, angewendet auf (u_1, u_2), liefert hier:

$$v_1 = \frac{u_1}{||u_1||} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist $\langle v_1, u_2\rangle = \frac{6}{\sqrt{5}}$ und daher $u_2 - \langle v_1, u_2\rangle v_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Wir erhalten

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wie gewünscht, gelten $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ und $||v_1|| = ||v_2|| = 1$. Also ist (v_1, v_2) eine Orthonormalbasis für die Ebene V.