4.3.14 Bemerkung *Ist eine Funktion f in zwei Variablen an der Stelle $p = (x_0, y_0)$ einmal stetig differenzierbar, dann hat der Graph von f an der Stelle $(p, f(p))$ eine eindeutig bestimmte Tangentialebene, die durch die folgende Gleichung gegeben ist:*

$$z = f(p) + (\partial_x f(p))\,(x - x_0) + (\partial_y f(p))\,(y - y_0)\,.$$

Die Tangentialebene ist parallel zur x-y-Ebene genau dann, wenn p ein kritischer Punkt von f ist.

Beweis. Die Tangenten an den Graphen von f in x-Richtung und in y-Richtung erzeugen die Tangentialebene. Deren Steigungen werden gerade durch die entsprechenden partiellen Ableitungen angegeben. q.e.d.

4.3.15 Beispiel Die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ hat an der Stelle $p = (0, 1)$ die Tangentialebene, gegeben durch die Gleichung

$$z = f(0, 1) + (\partial_x f(0, 1))\,x + (\partial_y f(0, 1))\,(y - 1) = 1 + 2(y - 1)\,.$$

An der Stelle $p = (1, 1)$ lautet die Gleichung der Tangentialebene $z = 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1)$.

4.4 Taylorentwicklung

Wir machen hier einen kleinen Exkurs über Wege (zum Beispiel in der Ebene oder im Raum), bevor wir den Beweis des Satzes 4.3.9 nachtragen.

Unter einem *Weg* oder einer *parametrisierten Kurve* in $\mathbb{R}^n$ versteht man eine Abbildung $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ von einem offenen oder abgeschlossenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$, die komponentenweise stetig ist. Es handelt sich also um eine Funktion von einer Variablen, deren Bild sich im $\mathbb{R}^n$ befindet. Wenn wir die Variable als die Zeit interpretieren, so können wir uns vorstellen, dass $\gamma(t)$ jeweils den Ort eines Massenpunktes zur Zeit t angibt. Das Bild von γ, nämlich die Teilmenge $\{\gamma(t) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$, ist gerade die Bahnkurve, die der Massenpunkt im Laufe der Zeit zurücklegt.

In Analogie zum eindimensionalen Fall definiert man Differenzierbarkeit hier folgendermassen:

4.4.1 Definition Man bezeichnet $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ als differenzierbar an der Stelle $t_0 \in I$, falls der folgende Grenzwert existiert:

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}\,.$$

Man nennt γ *differenzierbar*, wenn γ an jeder Stelle differenzierbar ist. Und schliesslich heisst γ *stetig differenzierbar*, wenn γ' stetig ist.

4.4.2 Bemerkung • *Wir können $\gamma'(t_0)$ als Geschwindigkeitsvektor von γ zum Zeitpunkt t_0 auffassen. Denn der Differenzenquotient $\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$ gibt jeweils eine Sekante des Weges an, und der Grenzwert für $t \to t_0$ beschreibt einen Tangentialvektor an die Bahn.*

• *Der Weg γ ist genau dann an der Stelle t_0 differenzierbar, wenn alle Komponenten von γ bei t_0 differenzierbare Funktionen sind. Ist genauer* $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, *so gilt* $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$.

4.4.3 Beispiel Sei $r > 0$ vorgegeben. Der Weg $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$ für $t \in [0, 2\pi]$ hat als Bild eine Kreislinie von Radius r. Er ist differenzierbar und die Ableitung ist $\gamma'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$ für $t \in [0, 2\pi]$. Der Betrag der Geschwindigkeit ist für den gesamten Weg konstant, denn

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)} = r\,,$$

aber die Richtung der Bewegung ändert sich natürlich. Der Geschwindigkeitsvektor ist jeweils tangent an die Kreislinie.

4.4.4 Beispiel Sind $p \neq q$ zwei Punkte in $\mathbb{R}^n$, so können wir die Verbindungsstrecke von p nach q durch folgenden Weg parametrisieren:

$$\gamma(t) := (1-t)p + tq \quad \text{für } t \in [0,1].$$

Hier ist $\gamma'(t) = q - p$ für alle t. Die Geschwindigkeit ist also über die gesamte Wegstrecke konstant.

4.4.5 Bemerkung *Ist γ injektiv und $\gamma'(t) \neq 0\ \forall t$, dann hat jeder Punkt auf der Kurve eine eindeutige Tangente und es handelt sich um einen glatten Weg.*

Hier sind zwei Beispiele von Kurven mit singulären Stellen.

4.4.6 Beispiel Die Kurve, definiert durch $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ (für $t \in \mathbb{R}$), hat eine Spitze im Nullpunkt und ist bekannt unter dem Namen Neillsche Parabel.

Die Kurve $\alpha(t) = (t^2 - 1, t(t^2-1))$ (für $t \in \mathbb{R}$) hat im Nullpunkt eine Selbstüberschneidung, dort gibt es also sogar zwei Tangenten in einem Punkt.

Für die Zusammensetzung von Funktionen mit Wegen gilt folgende Kettenregel:

4.4.7 Satz *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein stetig differenzierbarer Weg und $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Dann ist $f \circ \gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt:*

$$\frac{d}{dt}(f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} f(\gamma(t)) \cdot x_j'(t)\,,$$

wobei $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$.

Beweis. Wir führen den Beweis der Einfachheit halber nur für $n = 2$. Der höherdimensionale Fall ist entsprechend. Sei jetzt $t_0 \in [a, b]$ fest gewählt und sei $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$. Um die Ableitung von $f \circ \gamma$ bei t_0 zu bestimmen, betrachten wir zunächst den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x(t), y(t)) - f(x_0, y_0)}{t - t_0} = \frac{f(x(t), y(t)) - f(x_0, y(t))}{t - t_0} + \frac{f(x_0, y(t)) - f(x_0, y_0)}{t - t_0}.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, angewendet auf die Funktion $h(t) = f(x_0, y(t))$, gibt es ein t_1 zwischen t_0 und t mit:

$$\frac{f(x_0, y(t)) - f(x_0, y_0)}{t - t_0} = \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = h'(t_1).$$

Und nach der eindimensionalen Kettenregel ist $h'(t_1) = [\partial_y f(x_0, y(t_1))] \cdot y'(t_1)$. Entsprechend gibt es für die Funktion $g(t) = f(x(t), y)$ für festgehaltenes y ein t_2 mit

$$\frac{f(x(t), y) - f(x_0, y)}{t - t_0} = \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = g'(t_2) = [\partial_x f(x(t_2), y)] \cdot x'(t_2).$$

Setzen wir dies ein, erhalten wir zusammen

$$\frac{f(x(t), y(t)) - f(x_0, y_0)}{t - t_0} = [\partial_x f(x(t_2), y(t))] \cdot x'(t_2) + [\partial_y f(x_0, y(t_1))] \cdot y'(t_1).$$

Weil nach Voraussetzung die partiellen Ableitungen von f, sowie die Komponenten von γ und deren Ableitungen stetig sind, liefert der Grenzübergang von t nach t_0 die Behauptung. q.e.d.

4.4.8 FOLGERUNG *Sei $\gamma\colon [a, b] \to U$ ein Weg mit $\gamma'(t) \neq 0$ für alle t. Verläuft der Weg γ ganz in einer Niveaumenge von f, dann steht der Gradient von f an jeder Stelle $p = \gamma(t)$ senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(t)$. Ist f eine Funktion in 2 Variablen, dann steht also das Gradientenvektorfeld senkrecht auf den Niveaulinien. Ausserdem zeigt der Gradient an jeder Stelle in die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion f.*

Beweis. Ist $f(\gamma(t)) = c$ für alle t, dann folgt aus der Kettenregel $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$, und das heisst $\nabla f(\gamma(t)) \perp \gamma'(t)$. q.e.d.

Nun können wir auch den Beweis des Kriteriums 4.3.9 zur Bestimmung lokaler Extrema von Funktionen in mehreren Variablen mithilfe der Hessematrix nachtragen. Das Kriterium sagt folgendes:

Satz Sei $f \in C^2(U)$ für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$. Sei $p \in U$ eine kritische Stelle von f. Dann gilt:

1. Ist die Hessesche Matrix $H_f(p)$ positiv definit, so hat f bei p ein isoliertes lokales Minimum.

2. Ist die Hessesche Matrix $H_f(p)$ negativ definit, so hat f bei p ein isoliertes lokales Maximum.

3. Ist $H_f(p)$ indefinit, so hat f bei p kein lokales Extremum, sondern einen Sattelpunkt.

Beweis. Sei jetzt $n \geq 2$. Weil U offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $K_r(p) \subset U$. Zu $v \in \mathbb{R}^n$ mit $||v|| = 1$ betrachten wir die Funktion in einer Variablen

$$g(t) := f(p + tv) \quad \text{für } |t| < r.$$

Nach der Kettenregel 4.4.7 ist

$$g'(t) = \langle \nabla f(p + tv), v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f(p + tv)\, v_i\,,$$

wobei $v_1, .., v_n$ die Koordinaten von v bezeichnen. Daraus folgt wiederum mit der Kettenregel:

$$g''(0) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_j} \partial_{x_i} f(p)\, v_i v_j = v^T H_f(p) v\,.$$

Weil p nach Voraussetzung ein kritischer Punkt von f ist, gilt $g'(0) = 0$. Ist nun ausserdem die Hessematrix $H_f(p)$ positiv definit, so nimmt die zugehörige quadratische Form (ausser bei Null) nur positive Werte an. Also ist $g''(0) > 0$. Das eindimensionale Kriterium liefert also, dass g bei $t = 0$ ein isoliertes lokales Minimum hat. Dies gilt für jede Wahl des Richtungsvektors v und das bedeutet, dass f bei p ein isoliertes lokales Minimum hat. Entsprechend argumentiert man in den anderen Fällen.
q.e.d.

Hier nochmals die schon erwähnte Bemerkung über Fälle, in denen das Kriterium nicht direkt anwendbar ist:

4.4.9 Bemerkung *Ist p ein kritischer Punkt von f und ist $H_f(p)$ positiv semidefinit, das heisst, sind sämtliche Eigenwerte von $H_f(p)$ grösser oder gleich Null und ist mindestens ein Eigenwert positiv, dann kann f bei p ein isoliertes oder nichtisoliertes lokales Minimum oder einen Sattelpunkt haben. Aber ein lokales Maximum ist ausgeschlossen.*

Beweis. Denn ist v ein Eigenvektor zu dem positiven Eigenwert λ, so gilt für $g(t) = f(p + tv)$ wie im Beweis oben gezeigt $g''(0) = v^T H_f(p) v = \lambda ||v||^2 > 0$. Also hat die Funktion g bei $t = 0$ ein isoliertes lokales Minimum, das heisst, für genügend kleine $t \neq 0$ gilt $f(p) < f(p + tv)$. Also kann die Funktion f bei p kein lokales Maximum haben. q.e.d.

Schauen wir uns die Sattelpunkte nochmal genauer an. Nehmen wir an, f habe an einer Stelle p eine indefinite Hessematrix mit einem positiven und einem negativen

Eigenwert. Dann sieht der Graph von f in der Nähe von p aus wie ein Pass in einem Gebirge. Denn ist v ein Eigenvektor zu dem negativen Eigenwert, etwa $\lambda < 0$, dann hat $g(t) = f(p + tv)$ an der Stelle $t = 0$ ein isoliertes lokales Maximum, weil $g''(0) = v^T H_f(p)v = \lambda||v||^2 < 0$ ist. Und entsprechend gilt für einen Eigenvektor w zum positiven Eigenwert, dass $h(t) = f(p + tw)$ bei $t = 0$ ein isoliertes lokales Minimum hat, weil $h''(0) > 0$. Also zeigt v in die Richtung einer Passstrasse auf dem Graphen von f und w zeigt in die Richtung eines Wanderweges, der die Strasse auf der Passhöhe überquert.

4.4.10 Beispiel Sei wieder $f(x, y) = -x^3 + xy + y^2$. Wie bereits nachgerechnet, hat f im Nullpunkt einen Sattelpunkt mit der Hessematrix

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ und $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$. Ein Eigenvektor zum negativen Eigenwert λ_2 ist zum Beispiel $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Die Gerade durch v gibt also die Richtung der Passstrasse in diesem konkreten Beispiel an.

Die Taylorentwicklung (bis zum Grad 2) einer Funktion f um einen Punkt p in mehreren Dimensionen lautet folgendermassen:

4.4.11 Folgerung *Sei $f \in C^2(U)$ für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, $p \in U$ und $K_\epsilon(p) \subset U$. Dann gilt für alle $v \in \mathbb{R}^n$, $||v|| = 1$ und $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| < \epsilon$:*

$$f(p + tv) = f(p) + t\langle\nabla(f)(p), v\rangle + \frac{t^2}{2} v^T H_f(p)v + t^2 R(v)\,,$$

wobei $R(v)$ einen Restterm bezeichnet, der stetig von v abhängt und für den gilt $R(0) = 0$.

Beweis. Betrachten wir wieder die Funktion $g(t) = f(p + tv)$ für einen fest gewählten Richtungsvektor v und übersetzen wir die Taylorentwicklung von g bei $t = 0$, erhalten wir die behauptete Entwicklung in vier Terme, denn $g'(0) = \langle\nabla(f)(p), v\rangle$ und $g''(0) = v^T H_f(p)v$, wie eben gezeigt. q.e.d.

4.4.12 Beispiel Für die Funktion $f(x, y) = \frac{1}{1-(x+y)}$ lautet die Taylorentwicklung an der Stelle $p = (0, 0)$ für $v = (x, y)$ mit $||v||^2 = x^2 + y^2 = 1$:

$$f(p + tv) = f(tx, ty) = 1 + t(x + y) + t^2(x + y)^2 + t^2 R(x, y) \quad \text{für } |t| < 1.$$

4.5 Weglänge und Krümmung

4.5.1 Definition Ist $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ einmal stetig differenzierbar, so kann man die Länge der entsprechenden Kurve folgendermassen definieren:

$$L(\gamma) := \int_a^b ||\gamma'(t)||dt\,.$$

Wir können diese Definition auch auf Wege mit endlich vielen Knickstellen ausdehnen. Damit ist genauer folgendes gemeint: Sei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ eine Teilung des Intervalls $[a,b]$, und seien $\gamma_k\colon [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar (für $k = 1, \ldots, n$). Ist jetzt $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig und gilt $\gamma(t) = \gamma_k(t)$ für alle $t_{k-1} \le t \le t_k$, dann nennen wir γ stückweise stetig differenzierbar. In diesem Fall setzen wir

$$L(\gamma) := \sum_{k=1}^{n} L(\gamma_k)\,.$$

Sei $C_s^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ die Menge aller stückweise stetig differenzierbaren Kurven. Dazu gehören zum Beispiel die stückweise geradlinigen Kurven, die sogenannten Polygonzüge. Die Definition der Weglänge passt auch zur anschaulichen Vorstellung, wie die folgenden Eigenschaften zeigen:

1. Die Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (1-t)p + tq$, parametrisiert die Strecke zwischen p und q, und wir erhalten $L(\gamma) = \int_0^1 ||\gamma'(t)||\, dt = ||p-q||$, wie es der Anschauung entspricht.

2. Seien $p = p_0, p_1, \ldots, p_n = q$ Punkte in $\mathbb{R}^n$ und sei $\gamma\colon [0,n] \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\gamma(t) = (k-t)p_{k-1} + (t-(k-1))p_k$ für $k-1 \le t \le k$, $k = 1, \ldots, n$. Dann parametrisiert γ den Polygonzug durch $p, p_1, \ldots, p_{n-1}, q$, und wir erhalten wie gewünscht:
$$L(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} L(\gamma_k) = \sum_{k=1}^{n} ||p_k - p_{k-1}||\,.$$

3. Ist (γ_m) eine Folge von Polygonzügen, die “gutartig” gegen $\gamma \in C_s^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ konvergiert, dann gilt:
$$L(\gamma) = \int_a^b \lim_{m\to\infty} ||\gamma_m'(t)||\, dt = \lim_{m\to\infty} \int_a^b ||\gamma_m'(t)||\, dt = \lim_{m\to\infty} L(\gamma_m)\,.$$
(Man muss hier voraussetzen, dass sowohl die Folge der Wege, als auch die Folge der Ableitungen jeweils “gleichmässig” gegen γ bzw. γ' konvergieren.)

4. Ist der Weg so parametrisiert, dass man stets mit (im Betrag) konstanter Geschwindigkeit v unterwegs ist, das heisst $||\gamma'(t)|| = v$ für alle t, dann ist
$$L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt = v \cdot (b-a)\,.$$
Weil in dieser Situation pro Zeiteinheit die Strecke v zurückgelegt wird, gibt $v(b-a)$ tatsächlich die Gesamtlänge des Weges an.

5. Die Weglänge ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung. Genauer: Ist $\gamma \in C_s^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ und ist $\varphi\colon [r,s] \to [a,b]$ bijektiv, stetig differenzierbar und gilt $\varphi'(x) > 0$ für alle $x \in [r,s]$, so gilt wegen der Substitutionsregel:
$$L(\gamma \circ \varphi) = \int_r^s ||\frac{d}{dx}(\gamma \circ \varphi(x))||\, dx = \int_r^s ||\gamma'(\varphi(x))|| \cdot \varphi'(x)\, dx =$$

$$\int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt = L(\gamma)\,.$$

Hier noch ein kurzer Kommentar zu den Voraussetzungen. Ist γ stetig differenzierbar, so ist γ' ebenfalls stetig, der Betrag von γ' ist deshalb auf $[a, b]$ beschränkt, etwa durch M. Daraus folgt $L(\gamma) \leq \int_a^b M\, dt = M(b-a) < \infty$. Die Weglänge ist in diesem Fall also immer ein endlicher Wert.

Würde man die Voraussetzung abschwächen, wäre das nicht mehr garantiert. Es gibt Wege, die zwar differenzierbar sind, deren Ableitung aber nicht überall stetig ist, und deren Weglänge unendlich ist. Genauer gilt dann $\lim_{x\to b} \int_a^x ||\gamma'(t)||dt = \infty$ (siehe Beispiel in den Übungen). Noch schlimmer sieht es bei nur stetigen Kurven aus. Peano hat eine Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ konstruiert, deren Bild sogar ein ganzes Quadrat in der Ebene komplett ausfüllt. Das Bild von γ ist also nicht eindimensional, sondern zweidimensional!

Wenn ein Weg sogar zweimal stetig differenzierbar ist und so parametrisiert ist, dass $||\gamma'(t)||$ konstant ist, dann gibt die zweite Ableitung $\gamma''(t)$ Auskunft über die Krümmung des Weges.

4.5.2 Definition Wir sagen, ein Weg γ ist im Bogenmass parametrisiert, wenn $||\gamma'(t)|| = 1$ ist für alle t. In diesem Fall gilt für die Weglänge des Abschnitts von $\gamma(t_1)$ bis $\gamma(t_2)$

$$\int_{t_1}^{t_2} ||\gamma'(t)||\, dt = t_2 - t_1\,.$$

Für einen im Bogenmass parametrisierten Weg definieren wir die Krümmung des Weges an einer Stelle $p = \gamma(t)$ als $\kappa(p) = ||\gamma''(t)||$.

4.5.3 Beispiel Die Parametrisierung der Kreislinie von Radius $r > 0$, gegeben durch $\gamma(t) = (r\cos(\frac{t}{r}), r\sin(\frac{t}{r}))$, erfüllt die Bedingung, $\gamma'(t) = (-\sin(\frac{t}{r}), \cos(\frac{t}{r}))$ hat immer die Länge 1. Ausserdem ist $\gamma''(t) = \frac{1}{r}(-\cos(\frac{t}{r}), \sin(\frac{t}{r}))$ und daher $\kappa(t) = ||\gamma''(t)|| = \frac{1}{r}$. Je grösser der Radius, um so kleiner ist also die Krümmung.

4.5.4 Bemerkung *Ist γ im Bogenmass parametrisiert und zweimal stetig differenzierbar, dann gilt:*

$$\gamma''(t) \perp \gamma'(t)\ \forall t\,.$$

Sei jetzt an einer Stelle $p = \gamma(t)$ die zweite Ableitung $\gamma''(t) \neq 0$. Dann spannen der Tangentialvektor $\gamma'(t)$ und der Vektor $\gamma''(t)$ eine Ebene durch p auf. Die Kreislinie in dieser Ebene von Radius $r = \frac{1}{\kappa(p)}$ um den Punkt $q = p + r^2\gamma''(t)$ berührt die Kurve an der Stelle p und wird als Krümmungskreis bei p bezeichnet.

4.5.5 Beispiel Die räumliche Schraubenlinie, parametrisiert durch

$$\gamma(t) = (r\cos(\frac{t}{\sqrt{r^2+1}}), r\sin(\frac{t}{\sqrt{r^2+1}}), \frac{t}{\sqrt{r^2+1}})\,,$$

erfüllt die Bedingung an die erste Ableitung, und man findet hier $\kappa(t) = \frac{r}{r^2+1}$. Es ist also eine Kurve konstanter Krümmung.

Kapitel 5
Integration im Mehrdimensionalen

5.1 Wegintegrale und Potentiale

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Ist $U\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion, dann liefert der Gradient das sogenannte *Gradientenvektorfeld*, das jedem Punkt $p \in U$ auf stetige Art einen Vektor $\nabla U(p)$ an der Stelle p zuordnet. Allgemeiner versteht man unter einem stetigen *Vektorfeld* $F\colon D \to \mathbb{R}^n$ eine Zuordnung, die jedem Punkt $p \in D$ einen Vektor $F(p)$ zuordnet, der stetig von p abhängt. Dabei kann es sich zum Beispiel um die Geschwindigkeit einer Strömung an der Stelle p handeln. Die Gradientenvektorfelder spielen eine besondere Rolle, wie wir gleich sehen werden.

5.1.1 Definition Das Vektorfeld F wird als *konservativ* bezeichnet, wenn eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $U\colon D \to \mathbb{R}$ existiert, ein sogenanntes *Potential für* F, so dass
$$F(x) = \nabla U(x) \quad \text{für alle } x \in D.$$

5.1.2 Beispiele

- Bezeichnen wir für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Länge des entsprechenden Ortsvektors mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Das Gravitationsfeld auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, definiert durch
$$F(x, y, z) = -\frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
ist das Gradientenvektorfeld des Potentials $U(x, y, z) = \frac{1}{r}$.

- Sei jetzt $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y\sin(z) \\ x\sin(z) + y \\ xy\cos(z) \end{pmatrix}$ für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Um ein Potential U für F zu finden, verwenden wir zunächst die erste Komponente von F und integrieren sie über x:
$$U(x, y, z) = \int y\sin(z)\,dx + C(y, z) = xy\sin(z) + C(y, z)\,.$$
Nun ist die Funktion $C(y, z)$ noch so zu bestimmen, dass $\partial_y U(x, y, z) = x\sin(z) + \partial_y C(y, z) = x\sin(z) + y$ und $\partial_z U(x, y, z) = xy\cos(z) + \partial_z C(y, z) = xy\cos(z)$. Also hat F das Potential $U(x, y, z) = xy\sin(z) + \frac{1}{2}y^2$.

Nicht jedes Vektorfeld ist konservativ. Eine notwendige Bedingung ergibt sich aus dem Satz von Schwarz 4.3.5, den wir bereits im Zusammenhang mit der Hessematrix erwähnt hatten.

5.1.3 Satz *Ist $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, so gilt $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$.*

5.1.4 Folgerung *Ist $F\colon D \to \mathbb{R}^n$ ein konservatives Vektorfeld mit Komponentenfunktionen $F_1, \ldots, F_n$, so gilt* $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

5.1.5 Beispiel Das Vektorfeld $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x^2 \\ 3y^2 \end{pmatrix}$ besitzt kein Potential, denn $\partial_y F_3(x,y,z) = 6y \neq 0 = \partial_z F_2(x,y,z)$.

Betrachten wir jetzt eine differenzierbare Kurve $\gamma\colon [a,b] \to D$ im Gebiet D.

5.1.6 Definition Das Wegintegral des Vektorfeldes F längs der Kurve γ ist folgendermassen definiert:

$$\int_\gamma F := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle \, dt = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s}\,.$$

Das Skalarprodukt von F an der Stelle $\gamma(t)$ mit dem Geschwindigkeitsvektor $\dot\gamma(t)$ gibt die Komponente von F in Richtung des Weges an, und darüber wird eigentlich integriert.

Man kann (ähnlich wie bei der Definition der Weglänge) zeigen, dass diese Definition des Wegintegrals unabhängig von der Wahl der Parametrisierung des Weges ist. Der Begriff des Wegintegrals stammt aus der klassischen Mechanik. Ist F ein Kraftfeld, so gibt das Integral von F längs γ die physikalische Arbeit an, die bei einer Bewegung im Kraftfeld entlang des Weges γ geleistet wird bzw. die Energie, die für die Bewegung aufzuwenden ist.

5.1.7 Beispiele

1. Sei $\gamma(t) = p + t(q-p)$, $0 \le t \le 1$, der geradlinige Weg von p nach q in $\mathbb{R}^3$ und $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}$ ($c > 0$ konstant) ein konstantes Kraftfeld in z-Richtung. Man kann sich darunter die Gravitationskraft nahe der Erdoberfläche vorstellen. Dann ist

$$\int_\gamma F = \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle \, dt = \int_0^1 \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}, q - p \rangle \, dt = -c(z(q) - z(p))\,,$$

wobei $z(q)$, $z(p)$ jeweils die z–Koordinaten der Punkte p und q bezeichnen. Dies heisst also, dass die Arbeit, die aufzuwenden ist, um eine Masse im Schwerefeld der Erde von p nach q zu bewegen, nur von der Höhendifferenz der Punkte abhängt.

2. Sei $\gamma(t) = (r\cos t, r \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, eine Kreislinie und $F(x,y) = \begin{pmatrix} cx \\ cy \end{pmatrix}$ ($c > 0$ konstant) ein radiales Kraftfeld. Dann ist

$$\int_\gamma F = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle \, dt = \int_0^{2\pi} \langle \begin{pmatrix} cr\cos t \\ cr \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix} \rangle \, dt = 0\,.$$

3. Sei $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ (für $0 \leq t \leq 1$), $F(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\int_\gamma F = \int_0^1 (-t^3 \cdot 2t + t^2 \cdot 3t^2)\,dt = \int_0^1 t^4\,dt = 1/5\,.$$

Ein Potential ist die mehrdimensionale Entsprechung einer Stammfunktion für ein Vektorfeld bezogen auf Wegintegrale. Genauer gilt folgendes:

5.1.8 Satz *Ist F konservativ mit Potential U, und $\gamma\colon [a,b] \to D$ ein Weg von $\gamma(a) = p$ nach $\gamma(b) = q$, so hängt das Wegintegral von F über γ nur von p und q ab:*

$$\int_\gamma F = U(q) - U(p)\,.$$

Insbesondere verschwinden alle Wegintegrale über F längs geschlossener Wege. Ist ausserdem D wegzusammenhängend, so ist das Potential U bis auf Konstante eindeutig festgelegt.

Beweis. Das Vektorfeld F ist das Gradientenfeld der Funktion U. Setzen wir dies ein und verwenden die Kettenregel 4.4.7, erhalten wir:

$$\int_\gamma F = \int_a^b \langle \nabla U(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}U(\gamma(t))\,dt = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))\,.$$

Nehmen wir nun ausserdem an, dass D wegzusammenhängend ist. Wir wählen einen Punkt $a \in D$ als Basispunkt fest aus. Sei jetzt V ein weiteres Potential für F. Zu $x \in D$ wählen wir einen Weg von a nach x und erhalten wie eben:

$$\int_\gamma F = U(x) - U(a) = V(x) - V(a)\,.$$

Daraus folgt $U(x) - V(x) = U(a) - V(a) =: c$, also konstant für alle $x \in D$. q.e.d.

Dieser Satz bedeutet, dass in einem konservativen Kraftfeld die Energie erhalten bleibt und es nicht möglich ist, ein perpetuum mobile zu bauen. Allerdings ist nicht jedes Vektorfeld konservativ, und zwar selbst wenn die notwendige Bedingung 5.1.4 erfüllt ist. Hier dazu ein Beispiel:

5.1.9 Beispiel Sei $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$. Dies Vektorfeld gibt die Geschwindigkeit eines Strudels um den Nullpunkt an. Man kann nachrechnen, dass hier die Bedingung $\partial_x F_2 = \partial_y F_1$ erfüllt ist. Auf dem Bereich $x > 0$ hat F das Potential $U(x,y) = \arctan(y/x)$.

Aber F besitzt dennoch kein Potential auf ganz D, denn das Wegintegral von F über den folgenden geschlossenen Weg verschwindet nicht. Sei dazu der Einheitskreis parametrisiert durch $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ (für $t \in [0, 2\pi]$). Dann haben wir:

$$\int_\gamma F = \int_0^{2\pi} \langle \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \rangle\,dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t))\,dt = 2\pi \neq 0\,.$$

Verkleinert man aber den Definitionsbereich D auf eine kleine Kugel (ohne Loch), so kann man, wenn die notwendige Bedingung erfüllt ist, immer auch ein (lokales) Potential konstruieren.

5.1.10 Satz *Sei $D = K_R(p) \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Kreisscheibe und sei $F\colon D \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit Komponentenfunktionen $F_1, \ldots, F_n$, so dass $\partial_j F_i = \partial_i F_j$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$. Dann besitzt F ein Potential auf D.*

Beweis. Wir können nach eventueller Verschiebung annehmen, dass $p = 0$ ist. Zu $q \in K_R(0)$ bezeichne $\gamma_q\colon [0,1] \to D$ den geradlinigen Weg von p nach q, parametrisiert durch $\gamma_q(t) = tq$ für $0 \le t \le 1$. Die Koordinaten von q bezeichnen wir mit $x_1, \ldots, x_n$. Setze

$$U(x_1, \ldots, x_n) = \int_{\gamma_q} F = \int_0^1 \langle F(tx_1, \ldots, tx_n), q\rangle \, dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n F_j(tx_1, \ldots, tx_n)\, x_j \, dt\,.$$

Wir behaupten, dass U ein Potential für F ist, d.h. $\partial_{x_j} U = F_j$ für $j = 1, \ldots, n$. Wir zeigen dies nur für $j = 1$. Für die anderen Koordinaten argumentiert man entsprechend.

$$\partial_{x_1} U(q) = \int_0^1 \partial_{x_1} [\sum_{j=1}^n F_j(tx_1, \ldots, tx_n)\, x_j] \, dt = \int_0^1 [F_1(tq) + t \sum_{j=1}^n (\partial_1 F_j(tq)) \cdot x_j] \, dt\,.$$

Nach Voraussetzung gilt $\partial_1 F_j = \partial_j F_1$ für alle j. Also erhalten wir mit der Kettenregel 4.4.7

$$\partial_{x_1} U(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 [F_1(tq) + t \sum_{j=1}^n (\partial_j F_1(tq)))\, x_j] \, dt =$$

$$\int_0^1 [F_1(tq) + t\langle \nabla F_1(tq), q\rangle] \, dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(tF_1(tq)) \, dt = tF_1(tq)\Big|_0^1 = F_1(q)\,.$$

q.e.d.

5.1.11 Beispiel Wenden wir dies an auf das bereits erwähnte Vektorfeld, definiert durch $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \sin(z) \\ x \sin(z) \\ xy \cos(z) \end{pmatrix}$. Um das Potential zu finden, setzen wir wie im Satz:

$$U(x, y, z) := \int_0^1 (xF_1(tx, ty, tz) + yF_2(tx, ty, tz) + zF_3(tx, ty, tz)) \, dt =$$

$$\int_0^1 (x(ty) \sin(tz) + y(tx) \sin(tz) + zt^2 xy \cos(tz)) \, dt = xy \int_0^1 (2t \sin(tz) + zt^2 \cos(tz)) \, dt\,.$$

Die Stammfunktion dieses Integranden ist leicht zu raten, und wir erhalten das oben bereits genannte Potential von F:

$$U(x, y, z) = xyt^2 \sin(tz)\Big|_{t=0}^{t=1} = xy \sin(z)\,.$$