Vorlesung:
Differentialgleichungen

Annette A'Campo–Neuen

Universität Basel, Frühjahrssemester 2020

Inhaltsverzeichnis zur Vorlesung Differentialgleichungen

Literatur

- Karl-Heinz Goldhorn und Hans-Peter Heinz, Mathematik für Physiker 2 und 3, Springer-Verlag 2007/2008. *Band 2 behandelt Funktionentheorie, dynamische Systeme, Mannigfaltigkeiten und Variationsrechnung. In Band 3 geht es um partiellen Differentialgleichungen und harmonischer Analysis. Zu jedem Kapitel gibt es einen Ergänzungsteil mit Details zu Beweisen oder weiterführenden Bemerkungen und Beispielen, die man je nach Interesse noch zusätzlich lesen kann.*
- Helmut Fischer, Helmut Kaul, Mathematik für Physiker, Band 2, Teubner-Verlag 2001. *Hier findet man Kapitel über gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen und mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Darstellung anspruchsvoll und relativ knapp, aber dafür sehr umfassend.*
- Vladimir I. Arnold, Ordinary Differential Equations, 3rd Edition, Springer Universi-Text 1992. *Ausgezeichnetes Lehrbuch über gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme aus geometrischer Sichtweise.*
- Herbert Amann, Gewöhnliche Differentialgleichungen, de Gruyter 1983. *Der Autor legt viel Wert auf motivierende Beispiele und geometrische Anschaulichkeit.*
- Wolfgang Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer Lehrbuch 1993. *Solides Lehrbuch mit vielen Beispielen und historischen Anmerkungen.*

Kapitel 1
Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

Unter einer gewöhnlichen Differentialgleichung versteht man eine Gleichung, in der eine Funktion in einer Variablen zusammen mit ihren Ableitungen auftritt. Treten in der Gleichung Ableitungen bis höchstens zur n-ten Ordnung auf, so spricht man von einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung. Hier einige Beispiele erster oder zweiter Ordnung:

$$y'y + x = 0\,, \quad y' = e^y \cdot \sin(x)\,, \quad y'' + ky' + \omega^2 y = 0\,.$$

Dabei ist jeweils $y = y(x)$ als Funktion aufzufassen, die von x abhängt. Lässt sich die Gleichung nach der höchsten Ableitung auflösen, kann man sie in der folgenden expliziten Form schreiben:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \quad ,$$

wobei $f\colon D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion in $n+1$ Variablen bezeichnet. Eine n-mal stetig differenzierbare Funktion $\varphi \in C^n((a,b), \mathbb{R})$ ist eine Lösung dieser Differentialgleichung, wenn für alle $x \in (a,b)$ gilt:

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x))\,.$$

Im ersten Kapitel werden zunächst einmal gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung genauer betrachtet.

1.1 Anfangswertprobleme

Schauen wir uns eine Differentialgleichung der folgenden Form an

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)\,,$$

wobei $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion in zwei Variablen ist (und $D \subset \mathbb{R}^2$ offen). Sei ausserdem $(x_0, y_0) \in D$ fest gewählt.

1.1.1 Definition Eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi \in C^1(I)$, definiert auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so dass $(x, \varphi(x)) \in D$ für alle $x \in I$, ist eine Lösung des *Anfangswertproblems* (kurz AWP)

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{und} \quad y(x_0) = y_0\,,$$

falls $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ für alle $x \in I$ und $\varphi(x_0) = y_0$. Interpretieren wir die Variable x als die Zeit, so gibt der Wert y_0 den "Anfangswert" der gesuchten Funktion zum

Startzeitpunkt x_0 an. Wir nennen eine Lösung φ *maximal*, falls das Definitionsintervall I maximal gewählt ist und es keine Fortsetzung von φ auf ein grösseres Intervall zu einer Lösung gibt.

1.1.2 BEISPIELE

- Die maximale Lösung der Differentialgleichung $y' = 2xy$ zur Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ ($y_0 \in \mathbb{R}$) lautet, wie man durch Trennung der Variablen zeigen kann, $\varphi(x) = y_0 \cdot e^{x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$) und ist eindeutig bestimmt.

- Sei jetzt $y_0 > 0$ vorgegeben. Die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = y^2 \quad (y > 0) \quad \text{und} \quad y(0) = y_0$$

  lautet $\varphi(x) = \dfrac{y_0}{1 - y_0 x}$ für $x < \frac{1}{y_0}$. Hier hängt also das maximale Lösungsintervall von der gestellten Anfangsbedingung ab. Wiederum ist die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig bestimmt.

- Betrachten wir nun die Differentialgleichung

$$y' = 2\sqrt{|y|} \quad (y \in \mathbb{R}) \, .$$

  Die maximalen Lösungen dieser Differentialgleichung sehen folgendermassen aus. Zu jeder Wahl von Parametern $-\infty \leq c_1 \leq c_2 \leq \infty$ gibt es eine Lösung

$$\varphi_{c_1,c_2}(x) = \begin{cases} -(x - c_1)^2 & \text{für } x < c_1 \\ 0 & \text{für } c_1 \leq x \leq c_2 \\ (x - c_2)^2 & \text{für } x > c_2 \end{cases} .$$

  Zu der Anfangsbedingung $\varphi(1) = 0$ zum Beispiel haben wir also unendlich viele Lösungen, nämlich alle Lösungen φ_{c_1,c_2} mit $c_1 \leq 1 \leq c_2$. Das entsprechende Anfangswertproblem hat also unendlich viele maximale Lösungen!

- Die Mehrdeutigkeit der Lösung tritt nur auf, wenn wir den Wert $y = 0$ zulassen. Schränken wir dagegen den Definitionsbereich der Differentialgleichung ein und betrachten etwa das Anfangswertproblem

$$y' = 2\sqrt{|y|} \quad (y \neq 0) \quad \text{und} \quad y(1) = 1 \, ,$$

  so hat dies Anfangswertproblem genau eine maximale Lösung, nämlich $\varphi(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Es gilt folgender Satz (von Picard und Lindelöf) zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems:

1.1.3 SATZ *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig und nach y partiell differenzierbar, so dass $\partial_y f(x, y)$ stetig von x und y abhängt. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$y' = f(x, y) \quad \text{und} \quad y(x_0) = y_0$$

für jede Wahl von $(x_0, y_0) \in D$ eine eindeutig bestimmte maximale Lösung.

Die maximalen Lösungen einer Differentialgleichung bilden eine Kurvenschar. Der Satz besagt, dass wenn die Voraussetzungen erfüllt sind, durch jeden Punkt im Definitionsbereich D genau eine Kurve aus dieser Kurvenschar verläuft.

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Voraussetzungen des Satzes in den ersten beiden Beispielen von 1.1.2 erfüllt sind, im dritten Beispiel dagegen nicht. Der Beweis des Satzes wird etwas später nachgeliefert. Doch zunächst sollen einige Lösungsmethoden diskutiert werden.

1.2 Elementare Lösungsmethoden

Die Lösungen der Anfangswertprobleme in den Beispielen 1.1.2 kann man mithilfe der **Methode der Trennung der Variablen** bestimmen. Diese Methode lässt sich anwenden, wenn die fragliche Gleichung folgenden Typ hat:

$$y' = a(x)b(y)$$

für gewisse stetige Funktionen a und b in jeweils einer Variablen. Taucht x auf der rechten Seite der Gleichung nicht auf wie im zweiten und dritten Beispiel, dann ist einfach $a(x) = 1$ zu setzen. Erinnern wir kurz daran, wie dies Verfahren funktioniert. Wenn man nur solche y-Werte in Betracht zieht, für die $b(y) \neq 0$ ist, dann kann man die Gleichung umformen in

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x)\, dx\,.$$

Wenn man jetzt auf beiden Seiten die Integration ausführt und schliesslich nach y auflöst, erhält man die gesuchten Lösungen.

Wir führen das Verfahren hier exemplarisch für das erste Beispiel aus 1.1.2 durch. Wir schreiben diese Gleichung (unter der Annahme $y_0 \neq 0 \neq y$) zunächst um in

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2xy \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = 2x\, dx\,.$$

Auf diese Weise erscheint die Variable y nur noch auf der linken und die Variable x nur noch auf der rechten Seite der Gleichung. Nun integrieren wir beide Seiten und erhalten

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\, dx\,.$$

Hinter dieser Schreibweise verbirgt sich die Substitionsregel. Ausführlicher könnte man das Vorgehen folgendermassen rechtfertigen. Die gesuchte Lösung φ erfüllt die Gleichung

$$\varphi'(x) = 2x \cdot \varphi(x)\,,$$

also falls $y_0 \neq 0 \neq y$:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = 2x\,.$$

Nun integrieren wir beide Seiten über x und substituieren $y = \varphi(x)$. Die Substitutionsregel liefert dann wie eben behauptet

$$\int \frac{\varphi'(x)\,dx}{\varphi(x)} = \int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx\,.$$

Hier ergibt sich also

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y| + c_1 = \int 2x\,dx = x^2 + c_2\,,$$

wobei c_1, c_2 Integrationskonstanten sind. Setzen wir $c = c_2 - c_1$ und lösen nach y auf, erhalten wir

$$|y(x)| = e^{x^2+c} = e^{x^2}e^c\,.$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ ist genau dann erfüllt, wenn $e^c = |y_0|$ ist. Also lautet die Lösung des AWP wie behauptet:

$$\varphi(x) = y_0 \cdot e^{x^2}\,.$$

Man sieht, dass $y = \varphi(x)$ nie den Wert 0 annimmt, wenn $y_0 \neq 0$ ist. Also war die Annahme $y \neq 0$ gerechtfertigt. Im Fall $y_0 = 0$ argumentiert man entsprechend.

In günstigen Fällen kann man andere Typen von Differentialgleichungen durch passende **Variablentransformationen** auf den hier beschriebenen Typ von Gleichung zurückführen. Dazu ein Beispiel.

1.2.1 Beispiel Um das Anfangswertproblems

$$y' = (x+y)^2\,,\quad y(0) = 1\,,$$

zu lösen, führen wir die neue Variable $u = x + y$ ein. Dann gilt $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} = 1 + y'$. Also nimmt die Differentialgleichung, ausgedrückt in u, die folgende einfachere Form an:

$$u' = \frac{du}{dx} = 1 + u^2\,.$$

Hier können wir jetzt die Variablen trennen und erhalten

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan(u) = \int dx = x + c\,.$$

Die allgemeine Lösung ist also von der Form $u(x) = \tan(x + c)$. Rücksubstitution liefert

$$y(x) = \tan(x+c) - x\,.$$

Die Anfangsbedingung ist genau dann erfüllt, wenn $\tan(c) = 1$ ist. Die gesuchte maximale Lösung des Anfangswertproblem lautet also

$$y(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4}) - x \quad \text{für } -\frac{3\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\,.$$

Eine inhomogene lineare Differentialgleichung der Form

$$y' = a(x)y + b(x)\,,$$

wobei $a, b\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall I seien, lässt sich mithilfe der Methode der **Variation der Konstanten** lösen, die auf Lagrange zurückgeht. Dazu bestimmt man durch Trennung der Variablen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y' = a(x)y\,,$$

nämlich $y(x) = c \cdot e^{A(x)}$, wobei A eine Stammfunktion von a und c eine frei wählbare Integrationskonstante ist. Nun setzt man den Ansatz

$$y(x) = C(x) \cdot e^{A(x)}$$

in die inhomogene lineare Differentialgleichung ein und bestimmt die Funktion C so, dass die Differentialgleichung erfüllt ist. Hier wiederum ein Beispiel.

1.2.2 Beispiel Betrachten wir die Gleichung

$$y' = -\sin(x)y + \sin^3(x)\,.$$

Hier ist $a(x) = -\sin(x)$, als Stammfunktion dazu wählen wir $A(x) = \cos(x)$. Der Ansatz zur Lösung der Gleichung lautet also hier

$$y(x) = C(x) \cdot e^{\cos(x)}\,.$$

Setzt man dies in die inhomogene Differentialgleichung ein, erhält man

$$C'(x) \cdot e^{\cos(x)} - C(x)\sin(x)e^{\cos(x)} = -\sin(x)C(x)e^{\cos(x)} + \sin^3(x)\,.$$

Die Funktion $y(x)$ ist also genau dann eine Lösung, wenn

$$C(x) = \int \sin^3(x)\, e^{-\cos(x)}\, dx = \int (1-\cos^2(x))\, e^{-\cos(x)}\, \sin(x)\, dx\,.$$

Mit der Substitution $u = -\cos(x)$, $du = \sin(x)\, dx$, wird daraus

$$C(x) = \int (1-u^2)\, e^u\, du = (1-u^2+2u-2)\, e^u = (\sin^2(x) - 2\cos(x) - 2)\, e^{-\cos(x)} + c\,.$$

Die gesuchte allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist also

$$y(x) = \sin^2(x) - 2\cos(x) - 2 + c \cdot e^{\cos(x)}\,.$$

Wiederum kann man geeignete andere Differentialgleichungen durch passende **Variablentransformation** auf den Typ der inhomogenen linearen Differentialgleichung zurückführen und so lösen. Dies funktioniert zum Beispiel für die sogenannte *Bernoulli–Differentialgleichung*, nämlich

$$y' + a(x)\, y + b(x)\, y^\alpha = 0\,, \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1)\,.$$

Denn wir können die Gleichung umformen in

$$(1-\alpha)\,\frac{y'}{y^\alpha} + (1-\alpha)\,a(x)\,y^{1-\alpha} + (1-\alpha)b(x) = 0\,.$$

Setzen wir jetzt $u(x) = y^{1-\alpha}(x)$. Nach der Kettenregel ist $u'(x) = \frac{d}{dx}y^{1-\alpha}(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)\,y'(x)$. Also erfüllt y die Bernoulli–Differentialgleichung genau dann, wenn u die folgende lineare Differentialgleichung löst:

$$u' + (1-\alpha)\,a(x)\,u + (1-\alpha)b(x) = 0\,.$$

1.2.3 Beispiel Hier ein Anfangswertproblem für eine Bernoulli–Differentialgleichung mit $\alpha = 4$:

$$y' + \frac{y}{1+x} + (1+x)\,y^4 = 0 \quad y(0) = -1\,.$$

Die entsprechende lineare Differentialgleichung für $u = 1/y^3$ lautet:

$$u' - \frac{3}{1+x}u = 3 + 3x\,.$$

Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung ist

$$u(x) = c(1+x)^3 - 3(1+x)^2\,.$$

Also ist die Lösung der Bernoulli–Differentialgleichung von der Form

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(cx+c-3)(1+x)^2}}\,.$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = -1$ ist genau dann erfüllt, wenn $c = 2$ ist. Die gesuchte Lösung lautet also

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(2x-1)(1+x)^2}}$$

und ist definiert auf dem maximalen Lösungsintervall $-1 < x < \frac{1}{2}$.

1.3 Exakte Differentialgleichungen und integrierender Faktor

Ein weiterer spezieller Typ von Differentialgleichungen, bei denen sich die Lösungen unter Umständen einfach ablesen lassen, sind die *exakten Differentialgleichungen*. Hier ein Beispiel:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0)\,.$$

Wir können diese Gleichung umschreiben in

$$x\,dx + y\,dy = 0\,.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine sogenannte *Differentialform*. Genauer versteht man unter den stetigen 1–Differentialformen auf einer offenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ die Ausdrücke der Form

$$g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy\,,$$

wobei g, h stetige (bzw. stetig differenzierbare) Funktionen auf D sind. Dazu gehören beispielsweise die Differentiale von Funktionen in zwei Variablen. Ist nämlich f eine stetig differenzierbare Funktion auf D, so ist

$$df := \partial_x f(x,y)\,dx + \partial_y f(x,y)\,dy$$

eine sogenannte *exakte* stetige 1–Differentialform. Insbesondere sind dx und dy selbst exakte Differentialformen. Sie gehören zu den Koordinatenfunktionen x bzw. y, die jedem Punkt $p \in D$ seine x– bzw. seine y–Koordinate in $\mathbb{R}^2$ zuordnen. Mit Differentialformen kann man rechnen, indem man addiert und neu zusammenfasst oder mit stetigen Funktionen auf D multipliziert, und die Menge $\Omega^1(D)$ der stetigen 1–Differentialformen bildet einen reellen Vektorraum.

1.3.1 Definition Eine Differentialgleichung der Form

$$g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy = 0$$

für $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ heisst *exakt*, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ gibt mit $\partial_x f = g$ und $\partial_y f = h$. Eine differenzierbare Funktion $y = \varphi(x)$ ist eine Lösung dieser Differentialgleichung, wenn für alle x im Definitionsbereich von φ gilt

$$g(x,\varphi(x)) + h(x,\varphi(x))\,\varphi'(x) = 0\,.$$

1.3.2 Bemerkung *1. Ist φ eine differenzierbare Funktion in einer Variablen, deren Funktionsgraph ganz in einer Niveaumenge von f verläuft, also mit $f(x,\varphi(x)) = c$ für eine Konstante c, dann ist φ eine Lösung der exakten Differentialgleichung $df = 0$.*

2. Ist $\partial_y f(x_0,y_0) \neq 0$, dann gibt es eine maximale Lösung von $df = 0$ zur Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$. Gilt ausserdem $\partial_y f(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in D$, dann ist diese maximale Lösung sogar eindeutig bestimmt.

Beweis. 1. Aus der Kettenregel folgt $\langle \nabla f(x,\varphi(x)), (1,\varphi'(x))\rangle = 0$, und das heisst

$$\partial_x f(x,\varphi(x)) + \partial_y f(x,\varphi(x))\,\varphi'(x) = 0\,,$$

wie behauptet.

2. Der Graph einer Lösung zur Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ müsste in der Niveaumenge zu $c_0 = f(x_0,y_0)$ verlaufen. Es reicht also, die Gleichung $f(x,y) = c_0$ nach y aufzulösen. Nach dem impliziten Funktionensatz ist dies lokal in der Nähe des Punktes (x_0,y_0) möglich, wenn $\partial_y f(x_0,y_0) \neq 0$ ist. Die Eindeutigkeit der maximalen Lösung unter der zusätzlichen Annahme, dass $\partial_y f$ nirgends verschwindet, ergibt sich wiederum aus dem impliziten Funktionensatz. q.e.d.

1.3.3 Beispiel Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ vorgegeben. Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0) \quad \text{und} \quad y(0) = r\,.$$

Die Differentialgleichung können wir umformen in die exakte Differentialgleichung

$$df(x,y) = x\,dx + y\,dy = 0\,,$$

wobei $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Die Niveaulinien dieser Funktion sind Kreislinien mit dem Nullpunkt als Zentrum. Also ist die gesuchte maximale Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = r$ eindeutig bestimmt und lautet

$$\varphi(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{für } x \in (-r, r)\,.$$

In manchen Fällen gelingt es, eine nichtexakte Differentialgleichung durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor in eine exakte Differentialgleichung zu überführen.

1.3.4 Definition Seien wieder g, h stetig auf $D \subset \mathbb{R}^2$. Man bezeichnet eine auf D stetige Funktion $M(x,y)$ als *integrierenden Faktor* für die Differentialgleichung

$$g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy = 0\,,$$

wenn nach Multiplikation mit M die Differentialgleichung exakt wird. Das heisst, wenn eine stetig differenzierbare Funktion f auf D existiert, so dass

$$df(x,y) = M(x,y)g(x,y)\,dx + M(x,y)h(x,y)\,dy\,.$$

1.3.5 Beispiel Die Differentialgleichung

$$2y^2\,dx + (1 + 3xy)\,dy = 0$$

ist nicht exakt. Denn für $g(x,y) = 2y^2$ und $h(x,y) = 1 + 3xy$ müsste dann gelten $g_y(x,y) = h_x(x,y)$ für alle x, y. Hier ist aber $g_y(x,y) = 4y$ und $h_x(x,y) = 3y$. Aber es gibt einen integrierenden Faktor, nämlich $M(x,y) = (1+xy)$. Denn für die Funktion $f(x,y) = y\,(1 + xy)^2$ gilt

$$df(x,y) = 2y^2\,(1 + xy)\,dx + ((1 + xy)^2 + 2xy(1 + xy))\,dy =$$

$$2y^2\,(1 + xy)\,dx + (1 + 3xy)(1 + xy)\,dy\,.$$

Die Lösungen der Differentialgleichung finden wir also, indem wir

$$f(x,y) = y\,(1 + xy)^2 = c$$

(für c konstant) nach y (oder einfacher nach x) auflösen.