Kapitel 6

Hilberträume und symmetrische Operatoren

6.1 Hilberträume

Im ersten Kapitel haben wir bereits Banachräume kennengelernt, also normierte Vektorräume, die bezüglich der Norm vollständig sind. Von einem Hilbertraum wird noch mehr verlangt, nämlich dass die Norm durch ein Skalarprodukt gegeben ist.

6.1.1 Definition Ein Vektorraum V mit Skalarprodukt wird als *Hilbertraum* bezeichnet, wenn V bezüglich der zugehörigen Norm vollständig ist, das heisst also, wenn jede Cauchyfolge in V einen Grenzwert hat.

Ist ein Vektorraum V mit Skalarprodukt endlichdimensional, so ist die Vollständigkeitsbedingung automatisch erfüllt. Es handelt sich also in jedem Fall um einen Hilbertraum. Heikler wird es bei unendlichdimensionalen Vektorräumen.

Schauen wir uns zum Beispiel den Raum $V = C^n([a,b],\mathbb{R})$ der n-fach stetig differenzierbaren Funktionen genauer an. Wir hatten schon gesehen, dass dieser Raum bezüglich der folgenden Norm vollständig ist:

$$||f||_n := \max\{||f^{(k)}||_\infty \mid k = 0,\ldots,n\}\,.$$

Gäbe es zu dieser Norm ein passendes Skalarprodukt auf V, dann müsste die sogenannte *Parallelogrammregel* gelten.

6.1.2 Satz *(Parallelogrammregel) Ist V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt und bezeichnet $||\cdot||$ die zugehörige Norm, so gilt für alle $v, w \in V$:*

$$||v-w||^2 + ||v+w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2\,.$$

Beweis. Die Norm ist definiert durch $||v|| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$ für $v \in V$. Daraus ergibt sich mit der Linearität und Symmetrie des Skalarproduktes:

$$||v-w||^2 + ||v+w||^2 = \langle v-w, v-w\rangle + \langle v+w, v+w\rangle =$$

$$2\langle v,v\rangle - 2\langle v,w\rangle + 2\langle v,w\rangle + 2\langle w,w\rangle = 2||v||^2 + 2||w||^2\,. \qquad \text{q.e.d.}$$

Sei jetzt der Einfachheit halber $[a,b] = [0,2]$ und wählen wir die Funktionen $f, g\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{für } 1 \le x \le 2 \end{cases} \qquad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} 1-x & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{für } 1 \le x \le 2 \end{cases}\,.$$

Offenbar sind f, g stetig und $||f||_\infty = \max\{|f(x)| \mid x \in [0,2]\} = 1$ und ebenso $||g||_\infty = 1$. Ausserdem ist $(f+g)(x) = 1$ für alle x und

$$(f-g)(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{für } 1 \le x \le 2 \end{cases} .$$

Also ist $||f+g||_\infty = 1 = ||f-g||_\infty$. Wir erhalten:

$$||f-g||_\infty^2 + ||f+g||_\infty^2 = 2 \neq 4 = 2||f||_\infty^2 + 2||g||_\infty^2 .$$

Das zeigt, dass die Parallelogrammregel für die Maximumnorm auf $C^0([0,2],\mathbb{R})$ nicht gilt. Auf ähnliche Art kann man auch für andere Intervalle $[a,b]$ und für $n > 0$ Gegenbeispiele zur Parallelogrammregel konstruieren.

Es hat also keinen Sinn, nach passenden Skalarprodukten zu den Normen $||\cdot||_n$ zu suchen, um damit auf den Räumen $C^n([a,b],\mathbb{R})$ eine Hilbertraumstruktur zu etablieren. Die L^2-Integralnorm auf dem Raum der stetigen Funktionen $C^0([a,b],\mathbb{R})$ stammt dagegen tatsächlich von einem Skalarprodukt, nämlich

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,dx .$$

Aber wie bereits früher im Zusammenhang mit Banachräumen gezeigt, ist hier die Vollständigkeit nicht erfüllt. Denn es gibt Folgen stetiger Funktionen, die im Sinn des quadratischen Mittels Cauchyfolgen sind, aber im Raum der stetigen Funktionen keinen Grenzwert haben. Das Ziel der nächsten Paragraphen wird es sein, die Vervollständigung des Raumes der stetigen Funktionen mit der Integralnorm zu einem Hilbertraum zu konstruieren. Bevor wir uns dieser Aufgabe zuwenden, sei hier noch ein anderes konkretes Beispiel eines Hilbertraums beschrieben, nämlich der sogenannte *Hilbertsche Folgenraum*.

6.1.3 Definition Mit $\ell^2(\mathbb{R})$ bzw. $\ell^2(\mathbb{C})$ bezeichnet man die Menge aller Folgen reeller bzw. komplexer Zahlen, die *quadratsummierbar* sind. Dabei heisst eine Folge $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ quadratsummierbar, falls $\sum_{k=1}^\infty |a_k|^2 < \infty$ ist.

Zum Beispiel ist die Folge $(\frac{1}{k})_{k\in\mathbb{N}}$ quadratsummierbar, die Folge $(\frac{1}{\sqrt{k}})_{k\in\mathbb{N}}$ dagegen nicht, weil die Quadrate der Folgenglieder hier die harmonische Reihe liefern, die bekanntlich divergiert.

6.1.4 Satz *Die Menge $\ell^2(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) der quadratsummierbaren Folgen bildet einen $\mathbb{K}$-Vektorraum. Durch die Vorschrift*

$$\langle a, b\rangle := \sum_{k=1}^\infty \overline{a_k} b_k \quad \text{für } a, b \in \ell^2(\mathbb{K})$$

wird ein Skalarprodukt auf dem Folgenraum definiert, und bezogen auf die zugehörige Norm ist $\ell^2(\mathbb{K})$ vollständig.

Beweis. Machen wir uns zunächst einmal klar, dass die Summe von zwei quadratsummierbaren Folgen a, b wieder quadratsummierbar ist. Dazu verwenden wir die Ungleichung

$$|a_k|^2 + |b_k|^2 \geq 2|a_k b_k| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

(Denn $|a_k|^2 + |b_k|^2 - 2|a_k b_k| = (|a_k| - |b_k|)^2 \geq 0$.) Mit dieser Ungleichung können wir schliessen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2(|a_k|^2 + |b_k|^2) \leq 2\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 < \infty\,.$$

Ausserdem sind Vielfache von quadratsummierbaren Folgen offenbar wieder quadratsummierbar. Also bilden die quadratsummierbaren Folgen einen linearen Unterraum des Vektorraums aller Folgen.

Schauen wir uns nun an, wie das Skalarprodukt definiert ist. Um zu bestätigen, dass die Vorschrift sinnvoll ist, können wir wieder die bereits verwendete Ungleichung benutzen. Denn sind a und b quadratsummierbare Folgen, so ist

$$|\sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k} b_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) < \infty\,.$$

Überprüfen wir nun die definierenden Eigenschaften des Skalarproduktes.

(i) Ist $a \in \ell^2(\mathbb{K})$, so ist laut Vorschrift

$$\langle a, a\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2\,.$$

Da a quadratsummierbar ist, ist diese Reihe konvergent und der Grenzwert ist eine nichtnegative reelle Zahl. Da alle Summanden nichtnegativ sind, ist ausserdem der Grenzwert nur dann gleich Null, wenn alle Summanden verschwinden. Dies ist also nur bei der Nullfolge der Fall.

(ii) Die Linearität im zweiten Faktor ergibt sich sofort aus der Definition.

(iii) Die Antisymmetrie für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sieht man folgendermassen. Sind $a, b \in \ell^2(\mathbb{C})$, so ist nach Definition

$$\overline{\langle b, a\rangle} = \overline{\sum_{k=1}^{\infty} \overline{b_k} a_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\overline{b_k} a_k} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \overline{a_k} = \langle a, b\rangle\,.$$

Damit sind alle drei Eigenschaften gezeigt.

Jetzt müssen wir noch die Vollständigkeit nachweisen. Betrachten wir also eine Cauchyfolge von Folgen $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \ldots)$ aus $\ell^2(\mathbb{K})$. Das bedeutet: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein Index $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N$ gilt:

$$(*) \qquad ||x_n - x_m|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk} - x_{mk}|^2} < \epsilon\,.$$

Wir müssen zeigen, dass die Folge der Folgen x_n in $\ell^2(\mathbb{K})$ einen Grenzwert hat. Dazu schreiben wir die Folgen zeilenweise untereinander und schauen uns nun die Spalten des entstandenen Zahlenschemas an (sozusagen einer unendlichen Matrix). In der Spalte mit der Nummer j stehen jeweils die Einträge x_{nj} der Folgen x_n. Weil $|x_{nj} - x_{mj}|^2 \leq ||x_n - x_m||^2$ für alle n, m, ist die Folge $(x_{nj})_{n\in\mathbb{N}}$ (für festes j) eine Cauchyfolge von Zahlen. Da $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ vollständig ist, hat diese Zahlenfolge einen Grenzwert. Es gibt also eine Zahl $a_j \in \mathbb{K}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_{nj} = a_j$. Aus den Grenzwerten der Spalten bilden wir wiederum eine Folge $a := (a_1, a_2, a_3, \ldots)$, und tatsächlich ist dies der gesuchte Grenzwert der Folge von Folgen x_n. Denn halten wir in der Ungleichung (*) den Index m fest und lassen n gegen unendlich gehen, erhalten wir:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} |x_{nk} - x_{mk}|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - x_{mk}|^2} = ||a - x_m|| \leq \epsilon \quad \text{für alle } m \geq N.$$

Daraus folgt $\lim_{m\to\infty} x_m = a$. Ausserdem lesen wir ab, dass $(a - x_m)$ für alle $m \geq N$ quadratsummierbar ist. Insbesondere ist also die Folge $a - x_N$ quadratsummierbar und damit auch $a = (a - x_N) + x_N$. Damit ist nachgewiesen, dass die konstruierte Grenzfolge a im Folgenraum $\ell^2(\mathbb{K})$ enthalten ist. q.e.d.

6.2 Nullmengen und Lebesgue-Integral

Der Versuch, den Raum der stetigen Funktionen mit der Integralnorm zu vervollständigen, führt zu einer Reihe von Schwierigkeiten. Als Grenzwerte von Cauchyfolgen im quadratischen Mittel treten Funktionen mit Sprungstellen wie zum Beispiel Treppenfunktionen auf, die in der Vervollständigung enthalten sein müssen. Aus den Treppenfunktionen wiederum kann man Folgen bilden, die punktweise gegen nicht Riemann-integrierbare Funktionen konvergieren.

6.2.1 Beispiel Sei $q_1, q_2, q_3, \ldots$ eine Aufzählung aller rationalen Zahlen zwischen 0 und 1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A_n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, wobei

$$A_n := \cup_{j=1}^{n} [q_j - \frac{1}{2n^2}, q_j + \frac{1}{2n^2}] \cap [0,1].$$

Dann gilt an der Stelle $x \in [0,1]$ jeweils $\lim_{n\to\infty} f(x) = 1$, falls $x \in \mathbb{Q}$, und $\lim_{n\to\infty} f(x) = 0$, falls $x \notin \mathbb{Q}$ ist. Die Folge der Funktionen f_n konvergiert also punktweise gegen die bekannte nicht Riemann-integrierbare Funktion f auf $[0,1]$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ausserdem gilt

$$|\int_0^1 f_n(x)dx| \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

und daher $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$.

Auch diese Grenzfunktion sollte in der Vervollständigung erfasst sein, wir können die Integralnorm mit dem Riemannschen Integralbegriff nun aber nicht mehr auswerten. Einen Ausweg aus diesem Dilemma bietet die Erweiterung des Integralbegriffs nach Lebesgue. Sein Integralbegriff ist so gestaltet, dass bei Konvergenz einer Funktionenfolge im quadratischen Mittel bereits Integration und Limesbildung miteinander vertauscht werden dürfen. Für das Beispiel heisst das, die Grenzfunktion f ist im Sinne von Lebesgue integrierbar und der Wert des Integrals ist gleich Null.

Nun handelt es sich bei f aber um die sogenannte *charakteristische Funktion* der Menge der rationalen Zahlen zwischen 0 und 1. Das Integral über f misst die Grösse dieser Menge. Weil dies Mass verschwindet, bezeichnet man die Teilmenge der rationalen Zahlen deshalb auch als *Lebesgue-Nullmenge* in $\mathbb{R}$. Darunter versteht man genauer folgendes:

6.2.2 DEFINITION Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ heisst (Lebesgue)-Nullmenge, falls zu jedem $\epsilon > 0$ eine Folge von Intervallen $I_1, I_2, \ldots$ existiert, so dass

$$A \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) < \epsilon\,.$$

Dabei bezeichnet $\mu(I_k)$ die Länge des Intervalls I_k. Die Menge A lässt sich also durch eine abzählbare Menge von Intervallen überdecken, deren Gesamtlänge beliebig klein gewählt werden kann.

6.2.3 BEISPIELE

1. Besteht A nur aus einem Punkt a, so ist A eine Nullmenge. Denn zu $\epsilon > 0$ wählen wir $I := [a - \frac{\epsilon}{4}, a + \frac{\epsilon}{4}]$. Dann ist $a \in I$ und $\mu(I) = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

2. Jede endliche Menge $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ ist eine Lebesgue-Nullmenge. Jetzt brauchen wir jeweils m Intervalle. Zu $\epsilon > 0$ wählen wir $I_k := [a_k - \frac{\epsilon}{4m}, a_k + \frac{\epsilon}{4m}]$ für $k = 1, \ldots, m$. Die Vereinigung der Intervalle I_k enthält ganz A und $\sum_{k=1}^{m} \mu(I_k) = m\frac{\epsilon}{2m} < \epsilon$.

3. Sogar jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist eine Nullmenge. Wir wählen wiederum eine Aufzählung der Elemente $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Zu $\epsilon > 0$ wählen wir diesmal
$$I_k = [a_k - \frac{\epsilon}{4 \cdot 2^k}, a_k + \frac{\epsilon}{4 \cdot 2^k}] \qquad (k \in \mathbb{N})\,.$$
Jetzt ist
$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2 \cdot 2^k} = \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^k = \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Es gibt aber sogar überabzählbare Nullmengen, zum Beispiel die berühmte Cantormenge. Man kann diese Menge rekursiv konstruieren, in dem man aus dem Intervall $[0, 1]$ sukzessive Teilintervalle herausschneidet. Genauer ist $C = \lim_{n\to\infty} A_n$, wobei

$$A_0 = [0; 1]\,, \quad A_1 = A_0 \setminus [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]\,, \quad A_2 = A_1 \setminus [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}] \setminus [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}] \quad \text{usw.}$$

Oder anders gesagt: A_n ist die Vereinigung der Intervalle der Form $[q, q + \frac{1}{3^n}[$, wobei $q = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k}$ für gewisse $a_k \in \{0, 2\}$.

6.2.4 Bemerkung *Die Cantormenge stimmt überein mit*

$$C = \{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \mid a_k \in \{0,2\}\}\,.$$

Sie ist überabzählbar, aber dennoch eine Lebesgue–Nullmenge, denn $C \subset A_n \forall n$. Die Teilmenge A_n besteht aus 2^n Teilintervallen der Breite $\frac{1}{3^n}$, d.h. $\mu(A_n) = (\frac{2}{3})^n$ und daher $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Für die Definition der Integrierbarkeit im Sinne von Lebesgue brauchen wir noch einige Vorbereitungen. Wir gehen dabei von der Idee aus, eine Funktion durch Treppenfunktionen zu approximieren und dabei die Werte auf Nullmengen zu ignorieren.

6.2.5 Definition Eine Funktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine *Treppenfunktion*, falls eine Teilung $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ des Intervalls $[a,b]$ und Konstanten c_k existieren, so dass $\varphi(x) = c_k$ für alle $a_k < x < a_{k+1}$ $(k = 0,\ldots,n-1)$. Abgesehen von den Werten von φ an den Teilungspunkten a_k besteht der Graph von φ also aus n Stufen. Bekanntlich ist φ (Riemann)integrierbar, und es gilt:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(a_{k+1} - a_k)\,.$$

Hier zunächst die Beschreibung der Approximation des Integrals durch "verallgemeinerte Untersummen":

6.2.6 Definition Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heisse L^+-integrierbar, wenn eine Folge von Treppenfunktionen $\varphi_j\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ existiert, so dass folgendes gilt:

1. $\varphi_j(x) \le \varphi_{j+1}(x)$ für fast alle x;
2. $\lim_{j\to\infty} \varphi_j(x) = f(x)$ für fast alle x;
3. Es gibt eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ mit $\int_a^b \varphi_j(x)dx \le M$ für alle j.

Dabei soll "für fast alle x" bedeuten, dass die Teilmenge derjenigen Punkte x, für die die Aussage nicht gilt, eine Nullmenge bilden.

Eine Funktion ist also genau dann L^+-integrierbar, wenn sie sich fast überall als Grenzwert einer fast überall monoton wachsenden Folge von Treppenfunktionen mit beschränktem Integral darstellen lässt. In diesem Fall bilden die Integrale der Treppenfunktionen φ_j eine monoton wachsende, nach oben beschränkte und daher konvergente Folge. Wir definieren das Lebesgue-Integral der Funktion f nun als Grenzwert dieser Folge:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{j\to\infty} \int_a^b \varphi_j(x)dx\,.$$

Wie schon die Notation suggeriert, hängt der Wert des Integrals nicht von der Wahl der Folge (φ_j) ab. Es ist aber aufwendig, dies zu zeigen, und wir werden hier darauf verzichten.

6.2.7 Beispiele • Die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 stimmt bereits für fast alle x mit der Nullfunktion überein. (Denn die Ausnahmemenge, die rationalen Zahlen, bilden ja eine Nullmenge). Also können wir hier für φ_j einfach die Nullfunktion wählen (für alle j), und das Lebesgue-Integral über f ist tatsächlich gleich Null.

- Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist f Riemann-integrierbar, und wir können das Integral von f als Grenzwert einer Folge von Untersummen beschreiben. Wählen wir diese Folge nun so, dass das Intervall $[a,b]$ dabei fortlaufend verfeinert wird, so ist die Folge von Untersummen monoton wachsend. Jede einzelne Untersumme wiederum lässt sich als Integral einer geeigneten Treppenfunktion auffassen, und die Folge dieser Treppenfunktionen konvergiert punktweise gegen f. Der Zusatz "fast überall" wird in dieser Situation nicht gebraucht. Bei stetigen Funktionen stimmen also Riemann- und Lebesgue-Integral miteinander überein.

- Auch gewisse uneigentliche Integrale sind hier miterfasst. Betrachten wir zum Beispiel die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(0) = 0$ und $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ für $x \neq 0$. Hier existiert das uneigentliche Riemannintegral, und die Approximation des Integrals durch Untersummen entspricht einer Approximation von f durch Treppenfunktionen für alle $x \neq 0$. Also ist f hier L^+-integrierbar, und das Lebesgue-Integral stimmt mit dem uneigentlichen Integral überein:

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a\to 0} 2(\sqrt{1} - \sqrt{a}) = 2\,.$$

Nun die allgemeine Definition des Lebesgue-Integrals:

6.2.8 Definition Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist *Lebesgue-integrierbar*, wenn f sich als Differenz $f = g - h$ von zwei L^+-integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ schreiben lässt, und wir setzen dann

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx\,.$$

Hier eine Zusammenstellung wichtiger Eigenschaften (ohne Beweis):

6.2.9 Satz • *Die Menge $\mathcal{L}$ der Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ bildet einen Vektorraum.*

- *Ist f Lebesgue-integrierbar, so auch $|f|$, $f^+ := \frac{1}{2}(f + |f|)$, $f^- := f - f^+$.*

- *Sind $f, g \in \mathcal{L}$, so auch $f \cdot g$.*

- *Sind $f, g \in \mathcal{L}$, und ist $f(x) = g(x)$ für fast alle x, so ist*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx\,.$$

- *Ist $f \in \mathcal{L}$, $f(x) \geq 0$ für alle x und $\int_a^b f(x)dx = 0$, so folgt $f(x) = 0$ für fast alle x.*
- *Für stetige Funktionen auf $[a, b]$ stimmen Lebesgue- und Riemannintegral überein.*

Ausserdem gilt folgender Satz von der dominierten Konvergenz:

6.2.10 SATZ *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen auf $[a, b]$, die fast überall punktweise gegen eine Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiere, das heisst $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für fast alle x. Sei weiter $g \in \mathcal{L}([a, b])$ mit $|f_n(x)| \leq g(x)$ für fast alle x. Dann ist f ebenfalls Lebesgue-integrierbar und es gilt:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx\,.$$

Kommen wir nun zurück zu dem ursprünglichen Ziel, eine Vervollständigung des Vektorraums $C^0([a, b])$ der stetigen Funktionen bezüglich des Integralskalarprodukts zu konstruieren. Wir betrachten dazu folgenden Kandidaten:

$$\mathcal{L}^2 := \{f\colon [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ lokal Lebesgue-integrierbar und } \int_a^b f^2(x)dx < \infty\}\,.$$

Dabei nennen wir eine Funktion f lokal integrierbar, wenn für fast alle x ein Teilintervall $x \in I \subset [a, b]$ existiert, auf dem f Lebesgue-integrierbar ist. Zum Beispiel ist die Funktion $h\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, definiert durch $h(0) = 0$ und $h(x) = \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$, lokal integrierbar, aber wir können das Integral nicht auf ganz $[0, 1]$ auswerten, weil die entsprechende Fläche unter der Hyperbel nicht beschränkt ist.

Offenbar bildet $\mathcal{L}^2$ einen Vektorraum, der den Raum $C^0([a, b])$ umfasst. Wir können das Integralskalarprodukt auf diesen Raum fortsetzen, indem wir für $f, g \in \mathcal{L}^2$ definieren:

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx\,.$$

Dies Integral existiert, weil $|fg| \leq \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ und daher

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx + \frac{1}{2}\int_a^b g^2(x)dx < \infty\,.$$

Aber hier stossen wir auf ein neues Problem. Das durch diese Vorschrift erklärte Produkt erfüllt die Linearitäts- und die Symmetrieeigenschaft des Skalarprodukts, aber nicht die Normeigenschaft. Denn in $\mathcal{L}$ gilt zwar:

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(x)dx = 0 \quad \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \text{für fast alle } x.$$

Aber wenn die Funktion f zum Beispiel nur an einer einzigen Stelle einen Wert ungleich Null annimmt, merkt das Integral über f^2 davon nichts und ist trotzdem gleich Null. Wir können also aus $\langle f, f\rangle = 0$ nicht schliessen $f = 0$. Um die Normeigenschaft zu retten, geht man jetzt zu Äquivalenzklassen über. Das heisst, wir identifizieren einfach sämtliche Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden.

6.2.11 Definition Wir betrachten zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{L}([a,b])$ genau dann als äquivalent und schreiben $f \sim g$, wenn $f(x) = g(x)$ für fast alle x. Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. Die zu einer Funktion f gehörige Äquivalenzklasse schreiben wir als $[f]$ und bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen als

$$L^2([a,b]) := \{[f] \mid f \in \mathcal{L}^2\}.$$

Weil die Rechenoperationen mit der Relation verträglich sind, können wir den Raum $L^2([a,b])$ wiederum als Vektorraum auffassen, indem wir festsetzen

$$[f] + [g] := [f+g] \quad \text{und} \quad \alpha[f] := [\alpha f] \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R},\ f, g \in \mathcal{L}^2([a,b]).$$

Das Integralprodukt vererbt sich auf die Äquivalenzklassen, denn der Wert des Integrals über ein Produkt von Funktionen $f \cdot g$ ändert sich nicht, auch wenn wir sowohl f als auch g auf einer Nullmenge von Punkten abändern. Aber auf $L^2([a,b])$ ist jetzt die Normeigenschaft erfüllt. Denn aus $\langle f, f\rangle = 0$ folgt $f(x) = 0$ für fast alle x, und das heisst, f ist äquivalent zur Nullfunktion, repräsentiert also die "Nullklasse".

Jede Äquivalenzklasse in L^2 kann höchstens eine stetige Funktion enthalten. Denn angenommen f, g sind stetige Funktionen auf $[a,b]$ und $f \sim g$. Das heisst $f(x) = g(x)$ für fast alle x, und daher $f(x) - g(x) = 0$ für fast alle x. Also ist $\langle f-g, f-g\rangle = \int_a^b (f-g)(x)^2 dx = 0$. Da $(f-g)^2$ stetig und $(f-g)^2(x) \geq 0$ für alle x, folgt daraus sogar $(f-g)^2 = 0$. Also stimmen f und g miteinander überein. Das bedeutet, dass wir den Raum der stetigen Funktionen als Teilmenge von $L^2([a,b])$ auffassen können. Der Raum L^2 ist nun schliesslich die gesuchte Vervollständigung, denn es gilt folgendes:

6.2.12 Satz *Der Vektorraum $L^2([a,b])$ mit dem Integralskalarprodukt ist ein Hilbertraum, und der Teilraum $C^0([a,b])$ liegt darin dicht, das heisst, zu jeder Funktion $f \in \mathcal{L}^2([a,b])$ gibt es eine Folge stetiger Funktionen f_n auf $[a,b]$, die im quadratischen Mittel gegen f konvergieren.*

Auf den Beweis der Vollständigkeit von $L^2([a,b])$ müssen wir hier verzichten. Dazu müsste man sich wesentlich genauer mit der Lebesguetheorie befassen. Zur Dichtheit sei nur soviel gesagt: Man kann beweisen, dass es zu jeder Treppenfunktion φ eine Folge stetiger Funktionen gibt, die im quadratischen Mittel gegen φ konvergiert. Mithilfe der Treppenfunktionen wiederum können wir sämtliche Lebesgue-integrierbaren Funktionen (fast überall) approximieren. Deshalb liegt C^0 dicht in L^2.