6.3 Symmetrische Operatoren

Eine Abbildung zwischen Hilberträumen wird meist als *Operator* bezeichnet. Von besonderer Bedeutung sind die linearen Operatoren, die im Gegensatz zu den linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen, die wir bisher kennengelernt hatten, nicht auf dem ganzen Ausgangsraum definiert zu sein brauchen. Man verlangt vom Definitionsbereich nur, dass es sich um eine dichte, offene Teilmenge handelt.

6.3.1 Definition Seien $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ Hilberträume und sei $D \subset \mathcal{H}_1$ ein linearer Unterraum, der in $\mathcal{H}_1$ dicht liegt. Eine Abbildung $L\colon D \to \mathcal{H}_2$ wird als *linearer Operator* auf $\mathcal{H}_1$ bezeichnet, falls $L(f+g) = L(f) + L(g)$ und $L(\alpha f) = \alpha L(f)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g, \alpha f \in D$. Ein linearer Operator $L\colon D \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ heisst *symmetrisch*, falls

$$\langle L(f), g\rangle = \langle f, L(g)\rangle \quad \text{für alle } f, g \in D.$$

6.3.2 Beispiele

- Ist $\mathcal{H}_1 = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{H}_2 = \mathbb{R}^m$, jeweils mit dem Standardskalarprodukt, so ist ein linearer Operator zwischen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ nichts anderes als eine lineare Abbildung. Hier kann man stets ganz $\mathbb{R}^n$ als Definitionsbereich wählen. Bekanntlich wird jede solche Abbildung durch eine $m \times n$-Matrix induziert. Die durch eine reelle $n \times n$-Matrix A definierte Abbildung $L_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann symmetrisch, wenn die Matrix A symmetrisch ist, das heisst $A = A^t$.

- Ist $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ mit dem hermiteschen Standardprodukt. Die durch eine komplexe $n \times n$-Matrix A definierte lineare Abbildung $L_A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ist genau dann symmetrisch, wenn die Matrix A hermitesch ist, das heisst $A = A^* := \overline{A}^t$.

- Sei jetzt $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{R})$ der Hilbertsche Folgenraum. Betrachten wir zunächst die Abbildung R auf $\mathcal{H}$, die darin besteht, die Glieder einer Folge jeweils um eine Position nach rechts zu verschieben:

$$R((a_1, a_2, a_3, \ldots)) := (0, a_1, a_2, \ldots)\,.$$

Der so definierte Operator ist linear, aber nicht symmetrisch. Denn zum Beispiel für die Folgen $x = (1, 0, 0, \ldots)$ und $y = (0, 1, 0, 0, \ldots)$ erhalten wir:

$$\langle R(x), y\rangle = 1 \neq 0 = \langle x, R(y)\rangle\,.$$

Der Operator T auf $\ell^2(\mathbb{R})$ sei folgendermassen definiert:

$$T((a_k)_{k\in\mathbb{N}}) := (\frac{1}{k} a_k)_{k\in\mathbb{N}}\,.$$

Auch dieser Operator ist linear, ausserdem ist T sogar symmetrisch. Denn sind $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $b = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zwei quadratsummierbare Folgen, so gilt:

$$\langle T(a), b\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} a_k b_k = \langle a, T(b)\rangle\,.$$

6.3.3 Bemerkung *Nun wählen wir den Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2([a,b],\mathbb{R})$. Sei $D := \{f \in C^2([a,b],\mathbb{R}) \mid f(a) = 0 = f(b)\}$. Jede Funktion in D lässt sich zweimal ableiten, wir können daher den Laplaceoperator als linearen Operator auf $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich D auffassen:*

$$\Delta\colon D \to \mathcal{H}, \quad f \mapsto f''\,.$$

Mit dieser Wahl des Definitionsbereichs ist der Laplaceoperator symmetrisch.

Beweis. Für alle $f, g \in D$ gilt: $\langle f'', g\rangle =$

$$\int_a^b f''(x)g(x)dx = -\int_a^b f'(x)g'(x)dx + f'(x)g(x)|_a^b = -\int_a^b f'(x)g'(x)dx$$

und andererseits $\langle f, g''\rangle =$

$$\int_a^b f(x)g''(x)dx = -\int_a^b f'(x)g'(x)dx + f(x)g'(x)|_a^b = -\int_a^b f'(x)g'(x)dx\,.$$

Beide Skalarprodukte stimmen also miteinander überein. q.e.d.

Allgemeiner gilt:

6.3.4 Satz *Der Laplaceoperator auf $\mathcal{H} = L^2(\Omega,\mathbb{R})$ (für ein kompaktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand), mit dem Definitionsbereich $D := \{f \in C^2(\Omega,\mathbb{R}) \mid f(x) = 0$ für alle $x \in \partial\Omega\}$, definiert durch*

$$\Delta\colon D \to \mathcal{H}, \quad f \mapsto \Delta(f) = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 f\,,$$

ist symmetrisch.

Beweis. Hierfür können wir den folgenden Satz von Green verwenden, der eine Konsequenz des Gaussschen Divergenzsatzes ist, nämlich:

$$\int_\Omega (g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x))\,d^n x = \int_{\partial\Omega} (g(x)\,\partial_{n(x)} f(x) - f(x)\,\partial_{n(x)} g(x))\,d\sigma(x)\,,$$

wobei $\partial_{n(x)}$ die Ableitung in Richtung des äusseren Normalenvektors $n(x)$ im Punkt $x \in \partial\Omega$ bezeichnet. Weil wir nun zusätzlich vorausgesetzt haben, dass sowohl f als auch g auf dem Rand von Ω verschwinden, verschwindet hier der gesamte Integrand auf der rechten Seite der Gleichung. Es folgt also

$$\int_\Omega f(x)\cdot\Delta(g)(x) - g(x)\cdot\Delta(f)(x)\,d^n x = 0\,.$$

Das bedeutet gerade, dass der Laplaceoperator symmetrisch ist. q.e.d.

Das nächste Ziel wird es sein, eine Entsprechung des Hauptsatzes über symmetrische reelle Matrizen für symmetrische Operatoren auf unendlichdimensionalen Hilberträumen zu finden. Hier zur Erinnerung die Aussage des Hauptsatzes:

6.3.5 Satz *Ist A eine symmetrische $n \times n$-Matrix, so hat A nur reelle Eigenwerte und es gibt eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A.*

Der Begriff des Eigenwertes und des Eigenvektors lässt sich sofort auf lineare Operatoren ausdehnen.

6.3.6 Definition Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ wird als *Eigenwert* eines linearen Operators $L\colon D \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ bezeichnet, falls ein Vektor $0 \neq v \in D$ existiert mit $L(v) = \lambda v$. Der Vektor v heisst in dieser Situation *Eigenvektor* zum Eigenwert λ.

Die Entsprechung des Begriffs der Orthonormalbasis ist für unendlichdimensionale Hilberträume das vollständige Orthonormalsystem. Ein Orthonormalsystem besteht aus paarweise senkrechten, auf Länge 1 normierten Vektoren. Ein solches System nennt man vollständig, wenn es maximal ist, sich also nicht mehr vergrössern lässt. Genauer:

6.3.7 Definition Eine abzählbare Menge $\{v_1, v_2, v_3, \ldots\}$ in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ heisst *vollständiges Orthonormalsystem*, falls $v_i \perp v_j$ für alle $i \neq j$, $||v_j|| = 1$ für alle j, und falls kein $0 \neq v \in \mathcal{H}$ existiert mit $v \perp v_j$ für alle j.

6.3.8 Beispiel Sei $\mathcal{H} = L^2([0,\pi], \mathbb{R})$ mit dem Integralskalarprodukt. Der Laplaceoperator Δ auf $L^2([0,\pi], \mathbb{R})$ mit Definitionsbereich $D := \{f \in C^2([0,\pi] \mid f(0) = f(\pi) = 0\}$ ist wie bereits gezeigt symmetrisch. Die Funktionen $f_k(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx)$ ($x \in [0,\pi]$, $k \in \mathbb{N}$) sind jeweils Eigenvektoren von Δ zum Eigenwert $-k^2$, denn $\Delta(f_k) = f_k'' = -k^2 f_k$. Ausserdem bilden die Funktionen f_k ($k \in \mathbb{N}$) ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$.

Beweis. Bekanntlich gilt

$$\langle f_n, f_m \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)dx = 0 \quad \text{für alle } n \neq m.$$

Ausserdem ist

$$\langle f_n, f_n \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(nx)dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)dx = 1\,.$$

Nehmen wir weiter an, f sei eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = f(\pi) = 0$ und $f \perp f_k$ für alle k. Als stetig differenzierbare Funktion besitzt f eine Entwicklung in eine Sinusreihe der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k \sin(kx)\,, \quad \text{wobei} \quad \gamma_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\sin(kx)\,dx\,.$$

Nach der Annahme ist

$$0 = \langle f, f_k \rangle = \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(x)\sin(kx)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\gamma_k\,.$$

Also verschwinden alle Koeffizienten der Sinusreihe und daher ist f die Nullfunktion. Das Orthonormalsystem lässt sich also innerhalb der Menge $D := \{f \in C^2([0,\pi] \mid f(0) = 0 = f(\pi)\}$ nicht vergrössern. Nehmen wir nun an, g sei eine beliebige Funktion in $\mathcal{L}^2([0,\pi])$ mit $g \perp f_k$ für alle k. Da jede Funktion aus D sich durch eine Sinusreihe darstellen lässt, folgt daraus sogar $g \perp f$ für alle $f \in D$. Nun ist die Teilmenge D aber dicht in $\mathcal{H}$. Wir können g also als Grenzwert einer im quadratischen Mittel konvergierenden Folge von Funktionen $g_n \in D$ schreiben. Die Stetigkeit des Skalarproduktes liefert nun

$$\langle g, g\rangle = \langle g, \lim_{n\to\infty} g_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle g, g_n\rangle = 0\,.$$

Daraus folgt $g(x) = 0$ für fast alle x. Also repräsentiert g in $L^2([0,\pi])$ das Nullelement. Damit ist alles gezeigt. q.e.d.

6.4 Spektralsatz

Die folgenden Aussagen lassen sich wörtlich vom endlichdimensionalen auf den unendlichdimensionalen Fall übertragen:

6.4.1 Lemma *Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $D \subset \mathcal{H}$ offen und dicht und $L\colon D \to \mathcal{H}$ ein symmetrischer Operator, so sind sämtliche Eigenwerte von L reell. Sind v, w zwei Eigenvektoren von L zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda \neq \mu$ von L, so ist $\langle v, w\rangle = 0$.*

6.4.2 Definition Sei nun $\mathcal{H}$ ein unendlichdimensionaler Hilbertraum, $D \subset \mathcal{H}$ offen und dicht und $L\colon D \to \mathcal{H}$ ein symmetrischer Operator. Man sagt, L habe ein *diskretes Spektrum*, falls ein vollständiges Orthonormalsystem $(v_1, v_2, v_3, \ldots)$ aus Eigenvektoren von L für $\mathcal{H}$ existiert und die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_j = \langle v_j, L(v_j)\rangle$ eine monoton wachsende Folge bilden, wobei $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \infty$.

6.4.3 Beispiele

1. Der Operator $-\Delta$ auf $L^2([0,\pi],\mathbb{R})$ hat, wie eben gezeigt, ein diskretes Spektrum und die Eigenwerte sind die Quadratzahlen k^2 ($k \in \mathbb{N}$).

2. Sei jetzt $\mathcal{H} = L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx\rangle\,.$$

Sei weiter $D = \{f \in C^2([0,2\pi],\mathbb{C}) \mid f(0) = 0 = f(2\pi)\}$. Der Operator $-\Delta$ mit Definitionsbereich D ist auch auf diesem Hilbertraum symmetrisch und hat ein diskretes Spektrum. Denn die Eigenfunktionen $f_0(x) = 1$ (zum Eigenwert 0), $f_{2k-1}(x) := e^{ikx}$, $f_{2k}(x) := e^{-ikx}$ (zum Eigenwert k^2) für $k \in \mathbb{N}$, bilden ein vollständiges Orthonormalsystem von $\mathcal{H}$.

6.4.4 Bemerkung *Die Legendre-Polynome bilden ein vollständiges Orthonormalsystem im Hilbertraum $L^2([-1,1],\mathbb{R})$.*

Beweis. Die Legendresche Differentialgleichung lautet

$$(x^2-1)f''(x)+2xf'(x)=\lambda f(x) \quad (x\in[-1,1])\,.$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind genau die Eigenfunktionen des Differentialoperators L auf $C^2([-1,1])\subset L^2([-1,1])$, definiert durch

$$L(f)(x)=(x^2-1)f''(x)+2xf'(x) \quad (x\in[-1,1])\,.$$

Man kann nachrechnen, dass der Operator L symmetrisch ist. Deshalb sind die Lösungen der Differentialgleichung zu verschiedenen Eigenwerten λ automatisch orthogonal. Tatsächlich hat die Legendresche Differentialgleichung Lösungen für $\lambda=n(n+1)$ $(n\in\mathbb{N})$, und zwar gibt es zu jeder natürlichen Zahl n (bis auf Vielfache) genau eine polynomiale Lösung von Grad n für $\lambda_n=n(n+1)$. Bei entsprechender Normierung bilden diese Polynome also ein Orthonormalsystem, und dies System ist sogar vollständig. Denn innerhalb des Raums der Polynome lässt sich das System nicht vergrössern, und die Polynome wiederum liegen dicht im Raum der L^2-Funktionen, weil man jede glatte Funktion auf $[-1,1]$ durch eine Folge von Polynomen im quadratischen Mittel approximieren kann. Der Differentialoperator L hat also ein diskretes Spektrum mit Eigenwerten $n(n+1)$ $(n\in\mathbb{N})$. q.e.d.

Auch die bereits erwähnten Besselfunktionen können wir hier einordnen.

6.4.5 Bemerkung *Sei $\nu\in\mathbb{N}_0$ fest gewählt. Der Differentialoperator D auf $L^2([0,1])$, definiert für alle $v\in C^0([0,R]\cap C^2((0,R])$ mit $v(R)=0$ durch*

$$D(v)(r)=-v''(r)-\frac{1}{r}v'(r)+\frac{\nu^2}{r^2}v(r) \quad (0<r\leq 1)\,,$$

ist symmetrisch. Der Operator D hat ein diskretes Spektrum mit Eigenwerten $\lambda_j=j_{\nu,k}^2/R^2$ $(k\in\mathbb{N})$, wobei $j_{\nu,k}$ die positiven Nullstellen der Besselfunktion J_ν bezeichnen (siehe 5.4.1). Jeder Eigenwert ist einfach und der entsprechende Eigenraum wird aufgespannt von $v_k(r)=J_\nu(\frac{j_{\nu,k}}{R}\,r)$.

Die bereits zitierte Entwicklung einer Funktion in eine Sinusreihe können wir auch auf folgende Art schreiben:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(kx)\,dx\right)\sin(kx)=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^\pi f(x)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx)\,dx\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx)=\sum_{k=1}^{\infty}\langle f_k,f\rangle f_k(x)\,.$$

Ist f nicht stetig differenzierbar, so konvergiert diese Reihenentwicklung im allgemeinen nur noch für fast alle x. Das bedeutet, die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,f_k\rangle f_k$ konvergiert zumindest im quadratischen Mittel gegen f.

Die Fourierentwicklung einer Funktion $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ lautet:

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) \, ,$$

wobei $c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$. Mit den oben gewählten Bezeichungen $f_0(x) = 1$, $f_{2k-1}(x) := e^{ikx}$, $f_{2k}(x) := e^{-ikx}$ für $k \in \mathbb{N}$ wird daraus: $c_k = \langle f_{2k-1}, f \rangle$ und $c_{-k} = \langle f_{2k}, f \rangle$ (für $k \in \mathbb{N}_0$). Also können wir die komplexe Fourierreihe auch so schreiben:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, f \rangle f_n \, .$$

Auch andere vollständige Orthonormalsysteme liefern entsprechende Reihenentwicklungen für Funktionen.

6.4.6 SATZ *Hat der Operator L ein diskretes Spektrum aus Eigenwerten $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$, und ist $(v_1, v_2, \ldots)$ ein vollständiges Orthonormalsystem aus dazu gehörigen Eigenvektoren, so gilt folgendes:*

1. *Jedes Element $u \in \mathcal{H}$ besitzt eine Reihenentwicklung der Form*

   $$u = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle v_k, u \rangle v_k \, .$$

   Dabei ist der Grenzwert im Sinn der durch das Skalarprodukt definierten Norm zu verstehen. Man spricht hier auch von der verallgemeinerten Fourierentwicklung.

2. *Für die Koeffizienten der Reihe aus 1. (die verallgemeinerten Fourierkoeffizienten von u) gilt die Besselsche Gleichung*

   $$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v_k, u \rangle|^2 = ||u||^2 \, .$$

3. *Der Definitionsbereich von L kann maximal auf folgende Teilmenge ausgedehnt werden:*

   $$M := \{u \in \mathcal{H} \mid \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\langle v_k, u \rangle|^2 < \infty\} \, .$$

   Man kann L auf M fortsetzen, indem man für $u \in M$ setzt:

   $$L(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v_k, u \rangle \lambda_k v_k \, .$$

   Damit ist der Operator L sozusagen auf "Diagonalform" gebracht.

4. *Die Menge $\{\lambda_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ enthält sämtliche Eigenwerte von L, und alle Eigenräume von L sind endlichdimensional.*

Für den Beweis brauchen wir folgendes Lemma:

6.4.7 Lemma *Wir verwenden dieselben Bezeichnungen wie im Satz. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:*

$$||u - \sum_{k=1}^{n} \langle v_k, u\rangle v_k||^2 = ||u||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v_k, u\rangle|^2 .$$

Daraus folgt insbesondere die Ungleichung:

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle v_k, u\rangle|^2 \leq ||u||^2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. .$$

Kommen wir nun zum Beweis des Satzes.

Beweis. Zu 1.: Aus der im Lemma formulierten Ungleichung lesen wir ab, dass die Teilsummenfolge der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v_k, u\rangle|^2$ nach oben beschränkt ist. Da die Summanden alle nichtnegativ sind, folgt daraus bereits, dass die Reihe konvergiert, der Grenzwert $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v_k, u\rangle|^2$ existiert also.

Daraus wiederum können wir schliessen, dass die Teilsummenfolge s_n der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \langle v_k, u\rangle v_k$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{H}$ ist und deshalb im Hilbertraum $\mathcal{H}$ einen Grenzwert w hat. Denn

$$||s_n - s_m|| = ||\sum_{k=m+1}^{n} \langle v_k, u\rangle v_k|| = \sum_{k=m+1}^{n} |\langle v_k, u\rangle|^2 .$$

Nehmen wir nun an, der Grenzwert w stimme nicht mit u überein. Für die Differenz $u - w$ gilt wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes für alle $j \in \mathbb{N}$:

$$\langle v_j, u - w\rangle = \langle v_j, u\rangle - \langle v_j, \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle v_k, u\rangle v_k\rangle = \langle v_j, u\rangle - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle v_k, u\rangle \langle v_j, v_k\rangle = 0 .$$

Also steht $u - w$ senkrecht auf allen Vektoren v_k. Da wir vorausgesetzt haben, dass das System der v_k vollständig ist, muss daher $u = w$ sein.

Zu 2.: Die Aussagen 1 und 2 sind äquivalent, wie sich sofort aus dem Lemma ergibt.

Zu 3.: Nehmen wir an, der Operator L sei auf u auswertbar. Dann muss $L(u)$ die Besselsche Gleichung erfüllen. Wegen der Symmetrie des Operators L und weil alle Eigenwerte λ_k reell sind, gilt aber:

$$\langle v_k, L(u)\rangle = \langle Lv_k, u\rangle = \lambda_k \langle v_k, u\rangle .$$

Damit folgt aus 2.:

$$||L(u)||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v_k, L(u)\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\langle v_k, u\rangle|^2 < \infty .$$

Ist diese Ungleichung für die Koeffizienten $\langle v_k, u\rangle$ erfüllt, also $u \in M$, dann ist die Vorschrift $L(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v_k, u\rangle \lambda_k v_k$ wohldefiniert. (Die Konvergenz der Reihe ergibt sich wieder aus dem Lemma.) Ausserdem stimmt diese Vorschrift auf dem Definitionsbereich D mit der Wirkung von L überein. Denn nach 1. hat $L(u)$ (für $u \in D$) folgende Reihenentwicklung:

$$L(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v_k, L(u) \rangle v_k \,.$$

Verwenden wir jetzt wieder, dass $\langle v_k, L(u)\rangle = \lambda_k \langle v_k, u\rangle$, erhalten wir wie behauptet:

$$L(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle v_k, u \rangle v_k \,.$$

Zu 4.: Nehmen wir an, $0 \neq v$ sei ein Eigenvektor des Operators L zum Eigenwert $\mu \neq \lambda_k$ für alle k. Dann folgt $v \perp v_k$ für alle k, und wegen der Vollständigkeit des Orthonormalsystems ergibt sich daraus $v = 0$, ein Wiederspruch. Also enthält die Liste der λ_k bereits alle Eigenwerte. Wählen wir jetzt einen Eigenwert λ aus. Weil die Folge der λ_k gegen unendlich geht, gibt es einen Index n_0 mit $\lambda_k > \lambda$ für alle $k > n_0$. Also kann der Eigenwert λ höchstens mit den Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_0}$ übereinstimmen. Die Vielfachheit von λ ist also höchstens n_0 und damit endlich. Damit ist alles gezeigt. q.e.d.

6.4.8 Folgerung *Hat der symmetrische Operator L auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ein diskretes Spektrum aus Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ und ist $(v_1, v_2, v_3, \ldots)$ ein vollständiges Orthonormalsystem aus dazugehörigen Eigenvektoren, so ist die Zuordnung*

$$\mathcal{H} \to \ell^2(\mathbb{R})\,, \quad f \mapsto (\langle v_1, f\rangle, \langle v_2, f\rangle, \langle v_3, f\rangle, \ldots)$$

ein Isomorphismus von Hilberträumen. Der Operator L auf $\mathcal{H}$ geht dabei über in den Operator T auf $\ell^2(\mathbb{R})$, definiert durch

$$T((x_1, x_2, x_3, \ldots)) := (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, \ldots)$$

mit dem Definitionsbereich $M = \{((x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell^2(\mathbb{R}) \mid \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 x_j^2 < \infty\}$. Der Operator L ist durch die Wahl des vollständigen Orthonormalsystems also sozusagen auf Diagonalform gebracht worden.

Die Hermitefunktionen bilden ein vollständiges Orthonormalsystem des Hilbertraums $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ mit dem Integralskalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x)\, dx \,.$$

Sie treten auf im Zusammenhang mit der Schrödingergleichung. Die Schrödingergleichung für ein Teilchen mit einem Freiheitsgrad und Potentialfunktion $V(x) = x^2$ lautet

$$\partial_t u(x,t) = \frac{i}{2} \partial_x^2 u(x,t) - \frac{i}{2} x^2 u(x,t) \,.$$

Der Produktansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$ führt auf die gekoppelten Differentialgleichungen

$$w'(t) = \lambda w(t) \quad \text{und} \quad -\frac{i}{2}(x^2 v(x) - v''(x)) = \lambda v(x)\,,$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert des *Hermite-Operators*

$$H(v)(x) = x^2 v(x) - v''(x)$$

ist. Der Hermite-Operator hat folgende Eigenschaften:

6.4.9 Satz 1. *H ist ein symmetrischer Operator auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ mit Definitionsbereich $D = \{u \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \mid u' \in L^2(\mathbb{R})\}$.*

2. *Die Hermitefunktionen h_n, definiert für $n \in \mathbb{N}_0$ durch*

$$h_n(x) = (-1)^n \exp(x^2/2) \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\,,$$

sind Eigenfunktionen zum Hermiteoperator zum Eigenwert $(2n+1)$.

3. *Die Hermitefunktionen h_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ bilden nach passender Skalierung ein vollständiges Orthonormalsystem für $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, das heisst, der Hermiteoperator hat ein diskretes Spektrum auf $\mathcal{H}$.*

6.4.10 Folgerung *Jede Lösung der Schrödingergleichung lässt sich folgendermassen in eine Reihe entwickeln:*

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-i(n+\frac{1}{2})t} h_n(x)\,.$$

Dabei sind die a_n reelle Koeffizienten.

Zum Beweis des Satzes: 1. Die Symmetrie lässt sich leicht nachrechnen, wenn man berücksichtigt, dass die Funktionen im Definitionsbereich D im Unendlichen schnell abfallen müssen, damit das Quadrat über ganz $\mathbb{R}$ integrierbar ist.

3. Nehmen wir an, die zweite Aussage ist gezeigt. Dann folgt auch sofort, dass die h_n ein Orthonormalsystem bilden, weil die entsprechenden Eigenwerte paarweise verschieden sind. Wie wir gleich sehen werden, ist ausserdem jeweils h_n das Produkt eines Polynoms von Grad n mit der Gaussschen Funktion $g(x) = \exp(-x^2/2)$. Der von den h_n erzeugte lineare Unterraum in $\mathcal{H}$ enthält also alle Funktionen der Form $p(x)\exp(-x^2/2)$, wobei p ein beliebiges Polynom ist. Dieser Vorrat an Funktionen liegt dicht in $\mathcal{H}$, was wir hier ohne Beweis angeben. Nun folgt die Behauptung wie in Beispiel 4.24.

Es bleibt also nur noch die zweite Aussage zu zeigen. Dazu treffen wir zunächst einige Vorbereitungen.

6.4.11 Bemerkung *Die Hermitefunktionen sind von der Form*

$$h_n(x) = (-1)^n \exp(x^2/2) \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) = p_n(x)\exp(-x^2/2)\,,$$

wobei p_n ein Polynom von Grad n mit genau n verschiedenen reellen Nullstellen ist. Ist n ungerade, so ist p_n ungerade, und ist n gerade, so ist p_n eine gerade Funktion. Die ersten drei Hermitefunktionen lauten:

$$h_0(x) = \exp(-x^2/2)\,, \quad h_1(x) = 2x\exp(-x^2/2)\,, \quad h_2(x) = (-2+4x^2)\exp(-x^2/2)\,.$$

6.4.12 Lemma *Für die Hermitefunktionen gelten die folgenden Rekursionsformeln:*

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) &= xh_n(x) - h_n'(x) \\ h_{n+1}(x) &= 2xh_n(x) - 2nh_{n-1}(x) \\ 2nh_{n-1}(x) &= xh_n(x) + h_n'(x) \end{aligned}$$

Beweis. Die erste Rekursionsformel ergibt sich direkt aus der Definition mit der Produktregel:

$$h_n'(x) = (-1)^n \exp(x^2/2)(x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) + \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^{-x^2})) = xh_n(x) - h_{n+1}(x)\,.$$

Die zweite Rekursionsformel folgt aus der Leibnizregel für höhere Ableitungen, nämlich

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\,.$$

Denn damit können wir schliessen

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^{-x^2})) = \frac{d^n}{dx^n}((-2x)e^{-x^2}) = -2x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) - 2n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2}))\,.$$

Und daraus folgt

$$-h_{n+1}(x) = -2xh_n(x) + 2nh_{n-1}(x)\,.$$

Die dritte Aussage folgt sofort aus den ersten beiden. q.e.d.

6.4.13 Folgerung *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$H(h_n) = x^2 h_n(x) - h_n''(x) = (2n+1)h_n(x)\,.$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch vollständige Induktion. Für $n = 0$ und $n = 1$ kann man die Aussage nachrechnen. Sei jetzt die Aussage richtig für n und $n-1$ ($n \geq 1$). Dann erhalten wir für $n+1$ mithilfe der Rekursionsformeln und der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} H(h_{n+1}) &= x^2 h_{n+1}(x) - h_{n+1}''(x) = \\ &= 2x^3 h_n(x) - 2nx^2 h_{n-1}(x) - (2h_n(x) + 2xh_n'(x) - 2nh_{n-1}'(x))' \\ &= -2n(x^2 h_{n-1}(x) - h_{n-1}''(x)) - 4h_n'(x) - 2x(h_n''(x) - x^2 h_n(x)) \\ &= (2n-1)[-2nh_{n-1}(x) + 2xh_n(x)] + 4[xh_n(x) - h_n'(x)] \\ &= (2n+3)h_{n+1}\,. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. q.e.d.