1.6 Differentialgleichungen im Komplexen

Man kann den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard und Lindelöf auch aufs Komplexe übertragen. Genauer gilt folgende Aussage:

1.6.1 Satz *Sei $D \subset \mathbb{C}^2$ ein Gebiet und $f\colon D \to \mathbb{C}$ in beiden komplexen Variablen holomorph. Auf dem Kompaktum $R = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z-z_0| \leq a, |w-w_0| \leq b\} \subset D$ sei f beschränkt durch die Konstante $M \geq 0$, d.h. $|f(z,w)| \leq M$ für alle $(z,w) \in R$. Dann existiert eine holomorphe Lösung $w(z)$ für das Anfangswertproblem*

$$w'(z) = f(z, w(z)) \quad \text{und} \quad w(z_0) = w_0\,,$$

die mindestens auf der Kreisscheibe $K = \{z \mid |z - z_0| < \min(a, b/M)\}$ definiert ist. Sind w, v Lösungen dieses Anfangswertproblems auf einem Gebiet G, das z_0 enthält, dann stimmen v und w auf G bereits überein.

Beweis. Die komplexe Ableitung f_w von f nach w ist stetig und daher auf dem Kompaktum R nach oben beschränkt, etwa durch die Konstante L. Nun folgt wie im Reellen aus dem Mittelwertsatz, dass f bezüglich w auf R Lipschitz-stetig ist. Das Anfangswertproblem können wir, wie im Reellen, in eine Integralgleichung umformulieren, nämlich

$$w(z) = w_0 + \int_{z_0}^{z} f(\zeta, w(\zeta))\, d\zeta\,,$$

und eine Lösung ist nichts anderes als ein Fixpunkt des Integraloperators

$$T(u) = w_0 + \int_{z_0}^{z} f(\zeta, u(\zeta))\, d\zeta\,.$$

Der Vektorraum B der auf K holomorphen und beschränkten Funktionen $u(z)$ bildet einen Banachraum mit der Norm

$$||u|| = \sup\{|u(z)| \cdot e^{-2L|z-z_0|} \mid z \in K\}\,.$$

Man kann zeigen: Der Operator T bildet die Teilmenge $U := \{u \in B \mid |u(z) - w_0| \leq b\ \forall z \in K\}$ in sich ab und ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $1/2$. Nun folgt aus dem Banachschen Fixpunktsatz die Existenz einer sogar eindeutigen Lösung auf K. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen. q.e.d.

1.6.2 Folgerung *Hat eine Funktion f in zwei reellen Variablen auf einem Gebiet D eine Fortsetzung zu einer holomorphen Funktion in zwei komplexen Variablen, dann ist die reelle Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

sogar reell-analytisch, d.h. sie besitzt eine Potenzreihenentwicklung.

1.6.3 Beispiel Die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -xy, \quad y(0) = 1$$

lautet

$$y(x) = \exp(-x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \quad \forall x\,.$$

Man kann also in entsprechenden Fällen versuchen, die Lösung mithilfe eines Potenzreihenansatzes zu bestimmen. Hier ein Beispiel:

1.6.4 Beispiel Betrachten wir die Riccati-Gleichung mit Anfangsbedingung

$$y' = x^2 + y^2\,, \quad y(0) = 1\,.$$

Hier ist $f(x,y) = x^2 + y^2$ ein Polynom, hat also offenbar eine holomorphe Fortsetzung. Der Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

führt auf

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x^2 + (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)^2 = x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}) x^n\,.$$

Koeffizientenvergleich liefert jetzt die rekursiven Bedingungen

$$a_0 = 1 = a_1, \quad 2a_2 = 2a_0 a_1, \quad 3a_3 = 1 + 2a_0 a_2 + a_1^2, \quad (n+1) a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \quad \forall n > 2.$$

Man findet (für $|x| < 1$)

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{7x^4}{6} + \ldots$$

Kapitel 2

Vektorfelder und Differentialgleichungen

2.1 Integralkurven von Vektorfeldern

Sei jetzt D eine offene Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $F\colon D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Wir können die erste Variable als Zeitparameter auffassen und damit F als ein zeitabhängiges Vektorfeld interpretieren, das jedem Paar $(t, X) \in D$ aus Zeit t und Ort X einen Vektor $F(t, X)$ in $\mathbb{R}^n$ zuordnet. Zum Beispiel liefert die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers in einem Fluss ein solches Vektorfeld in einem Teilgebiet des $\mathbb{R}^3$, und die Windgeschwindigkeit definiert ein Vektorfeld auf der Erdoberfläche. Jedes solche zeitabhängige Vektorfeld liefert eine Differentialgleichung erster Ordnung, nämlich die Gleichung

$$X'(t) = F(t, X(t)) \quad (t \in \mathbb{R}) .$$

Unter einer Lösung dieser Differentialgleichung versteht man eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ mit $(t, \gamma(t)) \in D$ für alle t und

$$\gamma'(t) = F(t, \gamma(t)) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Das bedeutet, zu jedem Zeitpunkt t stimmt der Geschwindigkeitsvektor von γ zur Zeit t mit dem von F am Ort $\gamma(t)$ vorgeschriebenen Vektor $F(t, \gamma(t))$ überein. Die Lösungskurven werden auch als *Integralkurven* des Vektorfeldes bezeichnet.

2.1.1 Beispiel Sei $f(x, y) = x^2 - y^3$ und $F(x, y) = \nabla f(x, y) = (2x, -3y^2)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ das Gradientenvektorfeld. Die entsprechende Differentialgleichung lautet:

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} = F(\gamma(t)) = \nabla f(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} 2x(t) \\ -3y^2(t) \end{pmatrix} .$$

Die Lösungskurven dieser Differentialgleichung sind die Gradientenlinien von f. Die Lösungen zur Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ und $y(0) = y_0$ sind: $x(t) = x_0 e^{2t}$ und $y(t) = \frac{y_0}{3y_0 t+1}$, definiert für $t > -\frac{1}{3y}$, falls $y_0 > 0$, bzw. für $t < |\frac{1}{3y}|$, falls $y_0 < 0$.

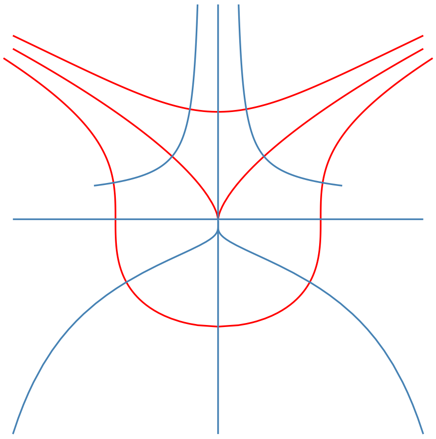

Abbildung 2.1: Gradientenlinien (in blau) und Niveaulinien (in rot).

2.1.2 Beispiel Jede homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung lässt sich als ein System von zwei linearen Differentialgleichungen im Phasenraum auffassen. Hier ist zum Beispiel die DGL für die Schwingung einer Feder mit Reibung:

$$x''(t) + 2\alpha x'(t) + \omega^2 x(t) = 0\,,$$

wobei $\alpha > 0$ ein Mass für die Reibung ist und $\omega > 0$ die Elastizität der Feder angibt. Setzen wir jetzt $y(t) := x'(t)$, können wir die DGL in folgendes System linearer Differentialgleichungen umschreiben:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ -\omega^2 x(t) - 2\alpha y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Dabei ist die Koeffizientenmatrix des Systems die sogenannte *Begleitmatrix* des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega^2$$

der ursprünglichen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Jede Lösung des Systems lässt sich als Kurve im $\mathbb{R}^2$ auffassen. Die gedämpfte Schwingung $x(t) = e^{-\alpha t}\cos(\beta t)$ entspricht zum Beispiel einer Spiralbewegung im Phasenraum

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = e^{-\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ -\alpha\cos(\beta t) - \beta\sin(\beta t) \end{pmatrix}.$$

Und hier aus aktuellem Anlass noch ein weiteres Beispiel:

2.1.3 Beispiel Ein einfaches Modell zur Ausbreitung einer Epidemie bietet folgendes System aus drei gekoppelten Differentialgleichungen. Bezeichne $S(t)$ die Anzahl anfälliger, aber noch nicht infizierter Personen, $I(t)$ die Anzahl infizierter Personen und $R(t)$ die Anzahl der in Quarantäne isolierten, genesenen oder verstorbenen Personen. Dann nehmen wir an, es gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} S'(t) &= -rS(t)I(t) \\ I'(t) &= rS(t)I(t) - bI(t) \\ R'(t) &= bI(t) \end{aligned}$$

wobei $r > 0$ die Infektionsrate und $b > 0$ die Ausscheidungsrate ist. Durch Aufaddieren aller drei Differentialgleichungen folgt, dass die Gesamtzahl $S(t)+I(t)+R(t)$ konstant sein muss. Es reicht also, die ersten zwei Gleichungen des Systems zu betrachten. Man kann das Verhalten der Lösungen analysieren, indem man die Funktion I in Abhängigkeit von S bestimmt. Denn aus (1) und (2) folgt

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{b}{rS}$$

und daraus durch Integration

$$I(S) = I_0 + S_0 - S + \frac{b}{r}\ln(S/S_0)\,.$$

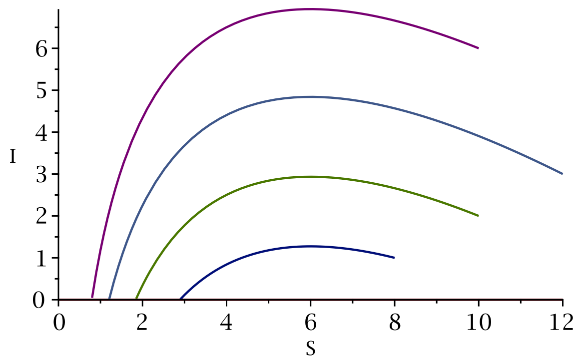

Abbildung 2.2: Anzahl infizierter Personen I in Abhängigkeit von Anfälligen S.

Die Lösung $\gamma(t) = \begin{pmatrix} S(t) \\ I(t) \end{pmatrix}$ bildet also eine Kurve im ersten Quadranten des $\mathbb{R}^2$, die beim Punkt (S_0, I_0) startet. Bei wachsendem t fällt $S(t)$ streng monoton und $I(t)$ wächst zunächst, bis ein Maximum bei $S = \frac{b}{r}$ erreicht wird, und fällt dann wieder ab. Es gilt $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$ und $\lim_{t\to\infty} S(t) = S_\infty > 0$. Die Epidemie endet erst, wenn es keine ansteckenden Personen mehr gibt. Und eine gewisse Anzahl S_∞ von Personen bleibt von der Epidemie verschont. Aus den diesen Überlegungen folgt der sogenannte Schwellensatz der Epidemiologie:

2.1.4 Satz *Ist die Zahl anfälliger Personen S_0 zu Anfang grösser als der Schwellenwert $\nu = \frac{b}{r}$, aber $S_0 - \nu << \nu$ und ist I_0 sehr klein im Vergleich zu S_0, dann werden etwa $2(S_0 - \nu)$ Personen insgesamt erkranken.*

Für Differentialgleichungen erster Ordnung gilt auch im mehrdimensionalen Fall ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz, denn der Banachsche Fixpunktsatz lässt sich auch hier anwenden.

2.1.5 Definition Sei $F\colon K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t, X) \to F(t, X)$ stetig. Man sagt, F sei auf K Lipschitz-stetig bezüglich X, falls eine Konstante $L > 0$ existiert mit

$$||F(t, X_1) - F(t, X_2)|| \leq L \cdot ||X_1 - X_2|| \qquad \text{für alle } (t, X_1),\ (t, X_2) \in K\,.$$

Die optimale Konstante L hängt von der Wahl der Norm auf $\mathbb{R}^n$ ab. Aber weil auf $\mathbb{R}^n$ alle Normen zueinander äquivalent sind, ist F entweder Lipschitz-stetig bezüglich jeder Norm oder bezüglich keiner Norm.

Hier einige Beispiele:

2.1.6 Beispiele

- Sei $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $F(t, X) = A \cdot X$, wobei A eine feste $n \times n$-Matrix ist. Dann ist F auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ Lipschitz-stetig zur Lipschitz-Konstante $L = ||A||$, wobei $||A|| := \max\{||Av|| \mid v \in \mathbb{R}^n, ||v|| = 1\}$ die Operatornorm von A zur gewählten Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

- Sei jetzt $F\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, von der Form $F(t, X) = A(t) \cdot X$, wobei $A(t)$ jeweils eine $n \times n$-Matrix ist, deren Einträge stetig von t abhängen. In diesem Fall hängt auch die Operatornorm $||A(t)||$ stetig von t ab und ist daher auf dem kompakten Intervall I beschränkt. Also folgt

$$L := \max\{||A(t)|| \mid t \in I\} < \infty\,.$$

- Ist $F\colon K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ einmal stetig differenzierbar, K kompakt und $\{X \in \mathbb{R}^n \mid (t, X) \in K\}$ konvex für alle t, dann erfüllt F die Lipschitz-Bedingung zur Lipschitz-Konstante

$$L := \max\{||JF_t(X)|| \mid (t, X) \in K\}\,.$$

Hier bezeichnet $JF_t(X)$ die Jacobi-Matrix der Abbildung $F_t\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $X \mapsto F(t, X)$, an der Stelle X.

Denn: Weil K konvex ist, liegt mit $p, q \in K$ auch jeder Punkt auf der Verbindungsstrecke $p + s(q - p) \in K$ für alle $0 \leq s \leq 1$. Jetzt setze $g(s) = F(t, p + s(q - p))$ (für t fest und $s \in [0, 1]$ variabel). Die Ableitung der Funktion g von s ist nach der Kettenregel

$$g'(s) = (JF_t(p + s(q - p))) \cdot (q - p)\,.$$

Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt nun:

$$||F(t, p) - F(t, q)|| = ||g(0) - g(1)|| \leq \max_s ||g'(s)|| \leq \max_{s \in [0,1]} ||JF_t(p + s(q - p))|| \cdot ||q - p||\,.$$

Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz lautet jetzt folgendermassen:

2.1.7 SATZ *Sei $F: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig. Weiter sei F auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset D$ Lipschitz-stetig bezüglich der Raumvariable X. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$X'(t) = F(t, X(t)), \qquad X(t_0) = X_0$$

für jede Wahl von $(t_0, X_0) \in D$ eine eindeutig bestimmte Lösung X mit maximalem Definitionsintervall.

Beweis. Wir verwenden wiederum den Banachschen Fixpunktsatz. Dazu sei auf $\mathbb{R}^n$ jetzt eine Norm fixiert. Wir wählen zuerst in D eine Zylinderumgebung K von (t_0, X_0) der Form $K = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times K_\epsilon(X_0)$, wobei $K_\epsilon(X_0) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid ||X - X_0|| \leq \epsilon\}$. Weil K kompakt ist, erfüllt F auf K eine Lipschitz-Bedingung bezüglich X mit Konstante L (bezogen auf die gewählte Norm). Sei zusätzlich $\delta < 1/L$.

Betrachten wir jetzt den Banachraum V der stetigen Wege $\gamma: [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ mit der Norm

$$||\gamma||_0 := \max\{||\gamma(t)|| \mid |t - t_0| \leq \delta\}\,.$$

Die Teilmenge $U \subset V$ der stetigen Wege γ, die ganz in der abgeschlossenen Kugel $K_\epsilon(X_0)$ verlaufen, also mit $||\gamma(t) - X_0|| \leq \epsilon$ für alle t, ist wiederum in V abgeschlossen.

Der Operator $T: U \to V$ sei definiert durch

$$T(\gamma)(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \gamma(s))\, ds\,.$$

Gemeint ist hier komponentenweise Integration. Nach eventueller Verkleinerung von δ gilt $T(U) \subset U$, denn

$$\begin{aligned} ||T(\gamma)(t) - X_0|| &\leq \delta \cdot \max\{||F(t, \gamma(t))|| \mid |t - t_0| \leq \delta\} \\ &\leq \delta \max\{||F(t, X)|| \mid (t, X) \in K\}\,. \end{aligned}$$

Die Funktion F ist stetig, nimmt also auf K ihr Maximum an, etwa M. Ist jetzt zusätzlich $\delta < \epsilon/M$, dann haben wir für alle t

$$||T(\gamma)(t) - X_0|| \leq \epsilon\,.$$

Jetzt bleibt nur noch zu zeigen, dass der Operator T kontrahierend wirkt. Für alle $|t - t_0| \leq \delta$ gilt:

$$||T(\gamma_1)(t) - T(\gamma_2)(t)|| \leq \delta L ||\gamma_1 - \gamma_2||\,.$$

Also ist T Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten $q = \delta L < 1$.

Also hat nach dem Banachschen Fixpunktsatz der Integraloperator T einen eindeutig bestimmten Fixpunkt γ_0 in U. Das heisst, die Differentialgleichung hat auf dem Intervall $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ genau eine Lösung zur vorgegebenen Anfangsbedingung. Diese Lösung setzen wir maximal fort. Auch die maximale Fortsetzung muss eindeutig sein. Denn sonst gäbe es ein Intervall $I = [t_1, t_2]$ und zwei Lösungen $\gamma_1, \gamma_2: I \to D$

mit $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_1) = X_1$ und $\gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)$ für alle $t_1 < t \leq t_2$. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass die Anfangsbedingung $X(t_1) = X_1$ lokal nur von genau einer Lösung erfüllt wird. q.e.d.

Der Beweis des Satzes beinhaltet wieder ein iteratives Verfahren zur Konstruktion der Lösung.

2.1.8 Beispiel Betrachten wir die Differentialgleichung

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = F(X(t)) = \begin{pmatrix} 2x(t) \\ 3y(t) \end{pmatrix}$$

zur Anfangsbedingung $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Hier lautet der Integraloperator

$$T(X)(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2x(t) \\ 3y(t) \end{pmatrix} dt\,.$$

Wenn wir mit der konstanten Funktion $X_0(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ starten, finden wir

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1+3t \end{pmatrix},$$

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2(1+2t) \\ 3(1+3t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1+2t+(2t)^2/2 \\ 1+3t+(3t)^2/2 \end{pmatrix},$$

und schliesslich für $n \in \mathbb{N}$:

$$X_{n+1}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2(1+2t+\ldots+\frac{(2t)^n}{n!}) \\ 3(1+3t+\ldots+\frac{(3t)^n}{n!}) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1+2t+\ldots+\frac{(2t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ 1+3t+\ldots+\frac{(3t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{pmatrix}.$$

Also ist die gesuchte Lösung

$$X(t) = \lim_{n\to\infty} X_n(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

2.2 Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Betrachten wir jetzt eine gewöhnliche Differentialgleichung von Ordnung n der Form

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

wobei $f\colon D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion in $n+1$ Variablen bezeichne. Hier gilt der folgende Existenz- und Eindeutigkeitssatz:

2.2.1 Folgerung *Für jede Wahl von $(t_0, c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) \in D$ gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung n-ter, die die Anfangsbedingungen*

$$x(t_0) = c_0\,, \quad x'(t_0) = c_1\,, \quad \ldots \quad, \quad x^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$$

erfüllt.

Beweis. Die Funktion $x(t)$ löst die angegebene Differentialgleichung n-ter Ordnung genau dann, wenn $X(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ folgende Gleichung löst:

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ f(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{pmatrix} .$$

Dies ist offenbar ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung, und die Anfangsbedingung

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

entspricht dem oben angegebenen Satz von Anfangsbedingungen an die Funktion $x(t)$. q.e.d.

Schauen wir uns den linearen Fall genauer an. Eine *homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung* hat die Form

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)x(t) = 0 ,$$

wobei $a_k, b \colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sind. Wenn wir eine solche Gleichung in ein System erster Ordnung umschreiben, erhalten wir folgendes

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \ldots & \ldots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} X(t) .$$

Sind die Koeffizienten a_k Konstanten, so ist die Koeffizientenmatrix die *Begleitmatrix* des charakteristischen Polynoms der ursprünglichen Differentialgleichung (siehe Beispiel 2.1.2).

Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz ergibt sich folgendes.

2.2.2 Satz 1. *Die Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung bilden einen n-dimensionalen Unterraum im Vektorraum aller Funktionen auf I. Eine Basis des Lösungsraums wird als Fundamentalsystem* der *Differentialgleichung bezeichnet.*

2. *Sind φ_1, φ_2 Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung, so ist die Differenz $\varphi_1 - \varphi_2$ Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.*

Für homogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung gibt es keine allgemeinen Lösungsformeln. Aber wenn die Koeffizientenfunktionen a_k konstant sind, also von t nicht explizit abhängen, dann kann man konkrete Fundamentalsysteme angeben.

2.2.3 Satz *Zu der linearen Differentialgleichung*

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)x = 0 \quad (a_k \in \mathbb{R} \text{ konstant,})$$

definiert man das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\lambda^k$. Hat p n verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, dann bilden die Funktionen $x_k(t) = e^{\lambda_k t}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

2.2.4 Beispiel Lösen wir folgendes Anfangswertproblem

$$x'' + 2x' + 5x = 0 \quad \text{und} \quad x(0) = 1, x'(0) = -1\,.$$

Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$ hat die komplex konjugierten Nullstellen $-1 \pm 2i$. Die Funktionen

$$x_1(t) = e^{-t+2it} \quad \text{und} \quad x_2(t) = e^{-t-2it}$$

bilden daher ein komplexes Fundamentalsystem. Geht man zu Real- und Imaginärteil über, erhält man ein reelles Fundamentalsystem. Die Anfangsbedingungen führen nun auf die Lösung $x(t) = e^{-t}\cos(2t) \quad (t \in \mathbb{R})$, die eine gedämpfte Schwingung beschreibt.

Wenn man bereits eine Fundamentallösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung gefunden hat, dann kann man eine zweite mithilfe des folgenden Ansatzes finden:

2.2.5 Bemerkung *Sei $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von $x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$ mit $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Dann findet man eine weitere, von φ linear unabhängige Lösung ψ mit dem Ansatz $\psi(t) = \varphi(t)u(t)$. Denn der Ansatz führt auf die folgende lineare Differentialgleichung erster Ordnung für u':*

$$\varphi(t)u''(t) + (2\varphi'(t) + a_1(t)\varphi(t))u'(t) = 0\,.$$

Durch Lösen dieser Gleichung und Integration von u' erhält man also schliesslich ψ.

2.2.6 Beispiele

- Man kann dies Prinzip verwenden, um ausgehend von der Fundamentallösung $\varphi(t) = t^n$ (für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) ein Fundamentalsystem der folgenden Differentialgleichung zu finden:

  $$x'' + \frac{1}{t}\,x' - \frac{n^2}{t^2}\,x = 0 \qquad (t > 0)\,.$$

  Und zwar ist hier $\psi(t) = t^{-n}$.

- Hat das charakteristische Polynom der Differentialgleichung $x''+a_1x'+a_0x=0$ eine doppelte Nullstelle bei λ_1, dann bilden $\varphi(t)=e^{\lambda t}$ und $\psi(t)=te^{\lambda t}$ ein Fundamentalsystem.

Schliesslich kann man auch mit einem Potenzreihenansatz nach Lösungen suchen.

2.2.7 Beispiel Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Die Legendresche Differentialgleichung dazu lautet

$$(t^2-1)x''+2tx'-n(n+1)x=0\,.$$

Eine Lösung dieser DGL ist das n-te Legendre-Polynom

$$P_n(t)=\frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n\,.$$

Eine weitere, davon linear unabhängige Lösung kann man mithilfe eines Potenzreihenansatzes finden.

2.3 Inhomogene Differentialgleichungen und Faltung

Schauen wir uns nun den inhomogenen Fall genauer an. Betrachten wir eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$D(x)(t)=x^{(n)}(t)+a_{n-1}x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_0x(t)=b(t)\,,$$

wobei b auf einem Intervall I definiert sei, das $t=0$ enthält. Sei weiter $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ ein Fundamentalsystem der entsprechenden homogenen Gleichung. Dann kann man daraus eine sogenannte Elementarlösung bilden und durch Faltung mit der Inhomogenität b eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung konstruieren (zumindest für $t\geq 0$).

2.3.1 Definition Sei $\varphi=\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k$ (c_k passende Konstanten) diejenige Lösung der homogenen Differentialgleichung $D(x)=0$ mit $\varphi(0)=0$, $\varphi^{(k)}(0)=0$ für alle $1\leq k\leq n-2$ und $\varphi^{(n-1)}(0)=1$. Als *Elementarlösung* der Differentialgleichung bezeichnet man die Funktion e, definiert durch

$$e(t)=\begin{cases}\varphi(t) & \text{für } t\geq 0\\ 0 & \text{für } t<0\end{cases}.$$

2.3.2 Satz *Wir schneiden auch die Funktion b auf dem Bereich $t<0$ ab, indem wir setzen: $b(t)=0$ für alle $t<0$. Die Funktion*

$$u(t):=(e*b)(t)=\int_0^t\varphi(t-s)b(s)\,ds\qquad(\text{für } t\geq 0,\ t\in I)$$

ist eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $D(x)(t)=b(t)$ auf dem Bereich $t\in I$, $t\geq 0$.

Zu zeigen ist also $D(u) = D(e*b) = b$. Nach den Rechenregeln über die Faltung ist dies äquivalent zu $D(e*b) = D(e)*b = b$ (für alle Inhomogenitäten b). Das neutrale Element des Faltungsproduktes ist aber gerade die Diracsche Deltafunktion. Deshalb schreibt man auch $D(e) = \delta_0$, und fasst e als Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zur Inhomogenität δ_0 auf.

Hier wird nur der Beweis für $n = 2$ angegeben. Der Allgemeinfall ist entsprechend. Dafür benötigen wir folgende Aussage über parameterabhängige Integrale:

2.3.3 Bemerkung *Sei $g\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine stetige, bezüglich der ersten Variablen differenzierbare Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $t \geq a$:*

$$\frac{d}{dt}\int_a^t g(t,s)\,ds = g(t,t) + \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} g(t,s)\,ds\,.$$

Beweis. Für $h > 0$ ist

$$\frac{1}{h}\left(\int_a^{t+h} g(t+h,s)\,ds - \int_a^t g(t,s)\,ds\right) =$$

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} g(t+h,s)\,ds + \int_a^t \frac{1}{h}(g(t+h,s) - g(t,s))\,ds\,.$$

Durch Grenzübergang $h \to 0$ folgt nun die Behauptung. q.e.d.

Beweis des Satzes für $n = 2$. Um $D(u)$ auswerten zu können, berechnen wir zunächst die erste und die zweite Ableitung von u und benutzen dabei die eben gezeigte Bemerkung. Für $t > 0$ gilt:

$$u'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \varphi(t-s)b(s)\,ds = \varphi(0)b(t) + \int_0^t \varphi'(t-s)b(s)\,ds\,.$$

Wegen der Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$ ist also $u'(t) = \int_0^t \varphi'(t-s)b(s)\,ds$. Daraus folgt mit der Bedingung $\varphi'(0) = 1$:

$$u''(t) = \varphi'(0)b(t) + \int_0^t \varphi''(t-s)b(s)\,ds = b(t) + \int_0^t \varphi''(t-s)b(s)\,ds\,.$$

Setzen wir nun ein in den Differentialoperator D, erhalten wir:

$$D(u)(t) = u''(t) + a_1u'(t) + a_0u(t) = b(t) + \int_0^t D(\varphi)(t-s)b(s)\,ds\,.$$

Nun ist aber nach Konstruktion $D(\varphi) = 0$ und daher $D(u)(t) = b(t)$ für alle $t \geq 0$. Also ist u wie behauptet eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. q.e.d.

2.3.4 Beispiel Sei $\lambda > 0$ vorgegeben. Betrachten wir die inhomogene Differentialgleichung

$$x''(t) - \lambda^2 x(t) = b(t) \quad \text{für } t \geq 0.$$

Hier lautet die entsprechende homogene Differentialgleichung $x'' = \lambda^2 x$. Die Lösungen sind die Funktionen der Form $\varphi(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{-\lambda t}$. Die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(0) = 1$ sind erfüllt, wenn $c_1 = -c_2 = \frac{1}{2\lambda}$ ist, d.h. $\varphi(t) = \frac{1}{\lambda}\sinh(\lambda t)$. Durch Abschneiden erhalten wir die Elementarlösung

$$e(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\sinh(\lambda t) & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Durch Faltung der Elementarlösung mit b wird daraus die folgende Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$u(t) := (e * b)(t) = \frac{1}{\lambda}\int_0^t \sinh(\lambda(t-s))b(s)\,ds\,.$$

Ist konkret $b(t) = \lambda$, findet man

$$u(t) = \frac{1}{\lambda}(\cosh(\lambda t) - 1)\,.$$

Ist $b(t) = e^t$ für $t \geq 0$, so ist (falls $\lambda \neq \pm 1$)

$$u(t) = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{1-\lambda}(e^t - e^{\lambda t}) - \frac{1}{1+\lambda}(e^t - e^{-\lambda t})\right) \quad \text{für } t \geq 0.$$