3.3 Flüsse oder Dynamische Systeme

Sei jetzt allgemeiner $F\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares, aber nicht notwendig lineares Vektorfeld. Dann erfüllt F die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes. Das bedeutet, dass die zugehörige Differentialgleichung

$$Y'(t) = F(Y(t))$$

zu jeder Anfangsbedingung $Y(t_0) = Y_0$ eine eindeutig bestimmte maximale Lösung hat. In dieser Situation hängt die rechte Seite der Differentialgleichung nicht explizit, sondern nur implizit von der Variablen t ab. Eine solche Differentialgleichung bezeichnet man als *autonom*. Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind gerade die *Integralkurven* des Vektorfeldes F. Das heisst, an jeder Stelle einer solchen Kurve stimmt der Geschwindigkeitsvektor mit dem an dieser Stelle durch das Vektorfeld vorgegebenen Vektor überein.

3.3.1 Definition Unter dem *Fluss* oder dem *dynamischen System*, definiert durch ein stetig differenzierbares Vektorfeldes $F\colon D \to \mathbb{R}^n$, versteht man die Abbildung $\varphi\colon G \subset \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n$, die einem Paar (t, X) die Lösung $\gamma(t)$ der Differentialgleichung $Y'(t) = F(Y(t))$ zur Anfangsbedingung $\gamma(0) = X$, zuordnet. Dabei ist die Teilmenge $G \subset \mathbb{R} \times D$ so gross gewählt wie möglich. Das heisst, ein Paar $(t, X) \in \mathbb{R} \times D$ liegt in G, wenn die maximale Lösung der Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $Y(0) = X$ bei t definiert ist. Der Fluss beschreibt also die Gesamtheit aller Lösungen der durch F gegebenen Differentialgleichung.

Bezeichnen wir mit $(\omega^-(X), \omega^+(X))$ das Definitionsintervall der maximalen Lösung der Differentialgleichung $Y' = F(Y)$ zur Anfangsbedingung $Y(0) = X$. (Es kann also auch vorkommen, dass die Intervallgrenzen minus oder plus unendlich sind). Dann können wir den Definitionsbereich des Flusses so schreiben:

$$G = \{(t, X) \mid X \in D, t \in (\omega^-(X), \omega^+(X))\}\,.$$

3.3.2 Beispiel Sei jetzt konkret $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Das entsprechende Vektorfeld ist gegeben durch $F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$. Als Definitionsbereich wählen wir diesmal $D := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid ||v|| < 1\}$. Die Lösung der zugehörigen Differentialgleichung zum Anfangspunkt $v = 0$ ist konstant gleich Null und für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ definiert. Die Lösung zur Anfangsbedingung $\gamma(0) = v$ (für $v \neq 0$) lautet $\gamma(t) = e^{-t}v$ und ist nur definiert für $t > \ln(||v||)$. Geht man noch weiter zurück in die Vergangenheit, wird der zulässige Bereich $D \subset \mathbb{R}^2$ verlassen. Also haben wir hier $\omega^-(v) = \ln(||v||)$ und $\omega^+(v) = +\infty$. Der Fluss des Vektorfeldes ist also gegeben durch

$$\varphi(t, v) = e^{-t}v$$

und er ist definiert auf dem Gebiet

$$G = \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{(t, v) \mid v \in \mathbb{R}^2, t > \ln(||v||)\}\,.$$

3.3.3 Definition Man bezeichnet den Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^n$ des Vektorfeldes auch als *Phasenraum*. Jede Lösung der Differentialgleichung $Y' = F(Y)$ beschreibt eine parametrisierte Kurve im Phasenraum, und die Anfangsbedingung gibt den Punkt vor, durch den diese Kurve für $t = 0$ geht. Zeichnet man diese Kurven in den Phasenraum ein, erhält man wie im linearen Fall das *Phasenbild*.

3.3.4 Beispiel Sei $f(x,y) = x^2 - y^3$ und $F(x,y) = \nabla f(x,y) = (2x, -3y^2)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ das Gradientenvektorfeld. Die entsprechende Differentialgleichung lautet:

$$\dot{\gamma}(t) = F(\gamma(t)) = \nabla f(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(t) \\ -3y^2(t) \end{pmatrix}.$$

Die Lösungskurven dieser Differentialgleichung sind die Gradientenlinien von f, und der Gradientenfluss von f ist hier folgender:

$$\varphi(t,x,y) = \begin{pmatrix} xe^{2t} \\ \frac{y}{3yt+1}) \end{pmatrix}, \text{ für } t > -\tfrac{1}{3y}, \text{ falls } y > 0, \text{ bzw. für } t < |\tfrac{1}{3y}|, \text{ falls } y < 0.$$

Die Funktion f definiert noch eine weitere Schar von Kurven, die auf den Gradientenlinien jeweils senkrecht stehen, nämlich seine Niveaulinien.

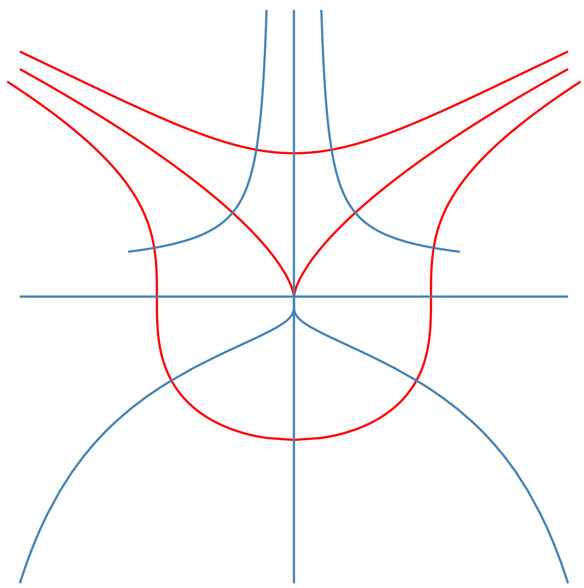

Abbildung 3.5: Gradientenlinien (in blau) und Niveaulinien (in rot).

Der Fluss eines Vektorfeldes hat eine Reihe bemerkenswerter Eigenschaften.

3.3.5 Satz

- *Der Fluss $\varphi \colon G \subset \mathbb{R} \times D \to D \subset \mathbb{R}^n$ ist stetig.*
- *Ist das Vektorfeld F p-mal stetig differenzierbar, so ist auch der zugehörige Fluss φ p-mal stetig differenzierbar.*
- *Ist F reell analytisch, so ist auch der Fluss φ analytisch.*

Beweis. Die erste (bzw. zweite) Aussage folgt daraus, dass die Lösung der Differentialgleichung $Y' = F(Y)$ stetig (bzw. differenzierbar) von der Anfangsbedingung abhängt. Auf den Beweis dieser Tatsache werden wir hier verzichten. Die dritte Aussage folgt daraus, dass das Picard–Lindelöf–Verfahren auch für holomorphe Funktionen (über $\mathbb{C}$) funktioniert. q.e.d.

3.3.6 SATZ *Ist $(t, X) \in G$ und $Y := \varphi(t, X)$, sowie $(s, Y) \in G$, dann folgt $(s + t, X) \in G$ und*

$$\varphi(s + t, X) = \varphi(s, \varphi(t, X)) .$$

Ausserdem ist $\varphi(0, X) = X$ für alle X.

Der Beweis dieser Aussage beruht auf der Beobachtung, dass die Lösungen einer autonomen Differentialgleichung invariant sind unter Translation der Zeit. Genauer:

3.3.7 LEMMA *Ist $\gamma\colon [a, b] \to D$ eine Lösung der Differentialgleichung $Y' = F(Y)$, wobei $F\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld ist, so ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ auch $\tilde{\gamma}\colon [a - t, b - t] \to D$, definiert durch $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(s + t)$, eine Lösung derselben Differentialgleichung.*

Beweis. Aus der Kettenregel ergibt sich für alle s:

$$\tilde{\gamma}'(s) = \frac{d}{ds}\gamma(s + t) = \gamma'(s + t) = F(\gamma(s + t)) = F(\tilde{\gamma}(s)) .$$

q.e.d.

Hier ein Beispiel einer *nichtautonomen* Differentialgleichung, für die die entsprechende Aussage nicht gilt:

3.3.8 BEISPIEL Sei $F(t, x, y) = (2t, y)$ für $t \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Durch dies zeitabhängige Vektorfeld wird folgende Differentialgleichung definiert:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ y(t) \end{pmatrix} .$$

Die Lösung $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dieser Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ lautet

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 + x_0 \\ y_0 e^t \end{pmatrix} .$$

Sei jetzt $t > 0$ festgewählt und $s \in \mathbb{R}$ variabel. Die Funktion

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(s + t) = \begin{pmatrix} (s + t)^2 + x_0 \\ y_0 e^{s+t} \end{pmatrix}$$

ist keine Lösung der Differentialgleichung, denn

$$\tilde{\gamma}'(s) = \begin{pmatrix} 2(s + t) \\ y_0 e^{s+t} \end{pmatrix} \neq F(s, \tilde{\gamma}(s)) = \begin{pmatrix} 2s \\ y_0 e^{s+t} \end{pmatrix} .$$

Beweis des Satzes: Die Gleichung $\varphi(0, X) = X$ (für alle X) ergibt sich sofort aus der Definition. Seien jetzt $(t, X), (s, Y) \in G$, wobei $Y := \varphi(t, X)$. Die Funktion $s \mapsto \varphi(s, \varphi(t, X)) = \varphi(s, Y)$ ist nach Definition die eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung $Y' = F(Y)$ zum Startvektor Y für $s = 0$. Vergleichen wir jetzt mit der Zuordnung $s \mapsto \varphi(s + t, X)$. Wie im Lemma bemerkt, handelt es sich ebenfalls um eine Lösung der durch F definierten Differentialgleichung. Ausserdem nimmt die Zuordnung bei $s = 0$ den Wert $\varphi(t, X) = Y$ an. Also stimmen beide Lösungen miteinander überein, und wir erhalten die Behauptung. q.e.d.

Stellen wir uns die Variable t jetzt als Zeitparameter vor. Dann beschreibt $t \mapsto \varphi(t, X)$ eine Bewegung längs einer Bahnkurve ausgehend vom Punkt X. Die Abbildung φ gibt die Gesamtheit dieser Bewegungen an. Ist $G = \mathbb{R} \times D$, so liefert der Fluss zu jedem fest gewählten Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ eine Transformation des Phasenraums

$$\varphi_t \colon D \to D, \quad \varphi_t(X) = \varphi(t, X)\,.$$

Es handelt sich sozusagen um eine Momentaufnahme zum Zeitpunkt t, die mit dem Anfangszustand in Beziehung gesetzt wird.

Für den Fall, dass der Definitionsbereich des Flusses $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ist, sind die Abbildungen φ_t Transformationen des Raumes $\mathbb{R}^n$. Die Aussage des Satzes 3.3.6 können wir in diesem Fall so schreiben:

$$\varphi_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}, \quad \varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t} \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere folgt für $s = -t$:

$$\varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_0 = \mathrm{id}\ .$$

Das bedeutet, die Transformation φ_t ist umkehrbar, und die Umkehrabbildung φ_t^{-1} stimmt überein mit φ_{-t} (dabei läuft die Zeit sozusagen rückwärts).

Betrachten wir die Zuordnung

$$\mathbb{R} \to \text{umkehrbare, in beiden Richtungen stetige Transformationen des } \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \varphi_t\,,$$

stellen wir fest, dass die Addition von Zahlen in $\mathbb{R}$ genau der Komposition von Transformationen entspricht. Eine solche Zuordnung wird als *Gruppenhomomorphismus* bezeichnet, oder man sagt, dass $\mathbb{R}$ (als additive Gruppe) auf dem Phasenraum operiert.

3.3.9 Definition Unter der *Bahn* (oder *Trajektorie*) eines Punktes $X \in D$ versteht man die Teilmenge

$$B_X = \{\varphi(t, X) \mid t \in (\omega^-(X), \omega^+(X))\}$$

des Phasenraums. Die Menge B_X ist gerade die Bahn von X unter der Operation der Gruppe $\mathbb{R}$, falls φ für alle Zeiten t definiert ist.

Aus den Eigenschaften eines dynamischen Systems ergeben sich nun folgende Konsequenzen für das Aussehen der Bahnen.

3.3.10 Folgerung *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $F\colon D \to \mathbb{R}^n$ ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld. Für die Trajektorien des entsprechenden Flusses gilt folgendes:*

- *Durch jeden Punkt des Phasenraums geht genau eine Trajektorie.*
- *Die Bahn eines Punktes besteht nur aus einem Punkt genau dann, wenn dieser Punkt eine Nullstelle des Vektorfelds F ist. In diesem Fall wird der Punkt als stationäre Lösung oder als Gleichgewichtslage bezeichnet.*
- *Ist ein Punkt keine stationäre Lösung, so ist der Geschwindigkeitsvektor an jeder Stelle der Bahn ungleich Null.*
- *Eine Bahn, die nicht nur aus einem Punkt besteht, ist entweder eine offene Kurve ohne Selbstüberschneidungen, oder sie ist einfach geschlossen und es gibt eine Periode $T > 0$ mit*
$$\varphi(t, X) = \varphi(t + T, X) \quad \text{für alle } t \in (\omega^-(X), \omega^+(X)).$$

Beweis. Nehmen wir an, ein Punkt $X \in D$ liege nicht nur auf seiner eigenen Bahn, sondern auch auf der Bahn des Punktes $Y \in D$. Das heisst, $X = \varphi(s, Y)$ für ein $s \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $\varphi_t(X) = \varphi_t(\varphi_s(Y)) = \varphi_{t+s}(Y)$ für alle $t \in (\omega^-(X), \omega^+(X))$. Also gilt

$$\{\varphi(t, X) \mid t \in (\omega^-(X), \omega^+(X))\} = \{\varphi(t + s, Y) \mid t + s \in (\omega^-(Y), \omega^+(Y))\}\,.$$

Das bedeutet, dass die Bahnen von X und Y bereits miteinander übereinstimmen. Die Beschreibungen dieser Bahnen unterscheidet sich nur durch eine Umparametrisierung der Zeit.

Zur zweiten Aussage: Ein Punkt X_0 ist genau dann ein Gleichgewichtspunkt, wenn $\varphi(t, X_0) = X_0$ für alle t. Das bedeutet, die Lösung der Differentialgleichung $Y' = F(Y)$ zur Anfangsbedingung $Y(0) = X_0$ ist die konstante Funktion $Y(t) = X_0$ (für alle t). Dies ist genau dann der Fall, wenn $Y'(t) = F(X_0) = 0$ ist.

Die dritte Aussage ist nur eine Umformulierung der zweiten Aussage.

Und nun zu den Möglichkeiten für eine eindimensionale Trajektorie: Angenommen $\varphi(t_1, X) \neq \varphi(t_2, X)$ für alle $t_1 \neq t_2$, dann hat die Bahn von X offenbar keine Selbstüberschneidungen. Sie kann auch keine Randpunkte haben, weil nach Voraussetzung D offen ist. Denn durch jeden Punkt p in D gibt es nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz eine Lösung der Differentialgleichung, die auf einem offenen Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert ist, und bei $t = 0$ durch p geht.

Nehmen wir nun an, die Bahn habe eine Selbstüberschneidung, bestehe aber nicht nur aus einem Punkt. Das heisst, es gibt Werte $t_1 \neq t_2$ mit $\varphi(t_1, X) = \varphi(t_2, X)$ und daraus folgt

$$\varphi(0, X) = X = \varphi_{-t_1}(\varphi(t_1, X)) = \varphi_{-t_1}(\varphi(t_2, X)) = \varphi(t_2 - t_1, X)\,.$$

Weil X keine Gleichgewichtslage sein sollte, ist der Geschwindigkeitsvektor der Bahn an der Stelle X ungleich 0. Die Dreigliedentwicklung von $\varphi(t, X)$ bezüglich t lautet

$$\varphi(t, X) = \varphi(0, X) + t\,F(X) + t\,R(t)\,,$$

wobei $\lim_{t\to 0} R(t) = 0$ ist. Daraus ergibt sich nun die Abschätzung:

$$||\varphi(0, X) - \varphi(t, X)|| = |t|\,||F(X) + R(t)|| > 0$$

falls $0 < |t|$ klein genug ist, so dass $||R(t)|| < ||F(X)||$. Es gibt also eine Zeit $t_0 > 0$ mit $\varphi(t, X) \neq \varphi(0, X)$ für alle $0 < t \leq t_0$. Anders gesagt, es verstreicht ein Zeitintervall, bevor die Bahn zum Ausgangspunkt zurückkehren kann.

Sei jetzt $T > 0$ die kleinste Zahl mit $\varphi(0, X) = \varphi(T, X)$. Dann erhalten wir wie behauptet

$$\varphi(t, X) = \varphi_t(\varphi(0, X)) = \varphi(t + T, X) \quad \text{für alle } t\,.$$

Die Funktion $t \mapsto \varphi(t, X)$ ist also periodisch mit Periode T, und die entsprechende Bahn ist einfach geschlossen. q.e.d.

Kehren wir zum Vergleich noch einmal zu dem oben genannten Beispiel einer nichtautonomen Differentialgleichung zurück.

3.3.11 Beispiel Die Lösungskurven der Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ y(t) \end{pmatrix}$$

lauten (für $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$):

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + x_0 \\ y_0 e^t \end{pmatrix}\,.$$

Ist $y_0 = 0$, so haben wir $\gamma(t) = (t^2 + x_0, 0)$. Diese Kurve verläuft entlang der x-Achse und hat an der Stelle $x = x_0$ einen Umkehrpunkt. Für je zwei verschiedene x_0-Werte überlappen sich die Bilder der Kurven in $\mathbb{R}^2$, ohne miteinander übereinzustimmen. Hier haben wir also Bahnen mit Randpunkten, die ineinanderlaufen. Ist $y_0 \neq 0$, so haben wir $y(t) = y_0 e^{\pm\sqrt{x(t)-x_0}}$ für alle t. Die entsprechenden Kurven im Phasenraum $\mathbb{R}^2$ verlaufen (je nach Vorzeichen von y_0) ganz in der oberen oder der unteren Halbebene, und haben jeweils an der Stelle (x_0, y_0) eine vertikale Tangente und einen Wendepunkt bei $x = x_0 + 1$.

Schauen wir uns Gradientenvektorfelder noch einmal genauer an. Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion in zwei Variablen, definiert auf einer offenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$, so ist das zugehörige Gradientenvektorfeld ∇f gegeben durch

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} g(x, y) \\ h(x, y) \end{pmatrix}\,, \quad \text{wobei } g(x, y) = \partial_x f(x, y) \text{ und } h(x, y) = \partial_y f(x, y)\,.$$

Betrachten wir jetzt das um 90 Grad gedrehte Vektorfeld

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} -h(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}.$$

Wenn wir zusätzlich annehmen, dass F keine Nullstellen in D hat, dann sind alle Trajektorien von F eindimensional und schneiden die Gradientenlinien jeweils senkrecht. Genauer handelt es sich gerade um die Zusammenhangskomponenten der Niveaulinien von f. Die Funktion f liefert also eine simultane Zerlegung von D in zwei Scharen von Kurven, die überall aufeinander senkrecht stehen. Die Trajektorien des Vektorfeldes F sind Lösungskurven der exakten Differentialgleichung

$$df = g\,dx + h\,dy\,.$$

3.4 Stabilität von Gleichgewichtslagen

Hier ist eine Präzisierung der intuitiven Vorstellung von Stabilität einer Gleichgewichtslage.

3.4.1 Definition Sei $Y \equiv X_0$ eine Gleichgewichtslage der Differentialgleichung $Y' = F(Y)$ für ein stetig differenzierbares Vektorfeld F. Der Punkt X_0 heisst *stabil*, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$||X - X_0|| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad ||\varphi(t,X) - X_0|| < \epsilon \quad \text{für alle } t > 0,$$

und andernfalls *instabil*. X_0 heisst *Attraktor*, falls ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t,X) = X_0 \quad \text{für alle } ||X - X_0|| < \delta.$$

X_0 heisst *asymptotisch stabil*, falls X_0 ein stabiler Attraktor ist.

Es gibt folgendes Kriterium für Stabilität für lineare Vektorfelder:

3.4.2 Satz *Sei A eine feste $n \times n$-Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Wir setzen $\gamma := \max\{\mathrm{Re}(\lambda_j) \mid j = 1, \ldots, n\}$. Ist $\gamma < 0$, so ist der Nullpunkt asymptotisch stabil für das durch A definierte dynamische System. Ist $\gamma > 0$, ist der Nullpunkt instabil.*

Der Vergleich mit den Phasenbildern der ebenen linearen Vektorfelder zeigt, dass hier die intuitiv vorgenommene Einteilung mit der nun gegebenen Definition, sowie mit dem Kriterium für Stabilität übereinstimmt.

Allgemeiner gilt folgendes Stabilitätskriterium für stationäre Punkte von stetig differenzierbaren Vektorfeldern (Prinzip der linearisierten Stabilität).

3.4.3 Satz *Sei $F\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, und sei $Y \equiv X_0$ eine stationäre Lösung der Differentialgleichung $Y' = F(Y)$. Bezeichne weiter γ das Maximum der Realteile von Eigenwerten des Differentials $DF(X_0)$ von F bei X_0. Entsprechend zu eben gilt: Ist $\gamma < 0$, so ist X_0 asymptotisch stabil für das durch F definierte dynamische System. Ist $\gamma > 0$, ist X_0 instabil.*

3.4.4 Beispiel Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{x} = x^2 - \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Die Gleichgewichtspunkte sind die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - \lambda$, nämlich $\pm\sqrt{\lambda}$ (falls $\lambda \geq 0$). Der Phasenraum ist hier eindimensional, und im Phasenbild für $\lambda > 0$ gibt es die zwei Punkte $\pm\sqrt{\lambda}$. Im Komplement dieser beiden Punkte gibt es die drei Bahnen $(-\infty, -\sqrt{\lambda})$, $(-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda})$, $(\sqrt{\lambda}, \infty)$.

Das Differential von f lautet $f'(x) = 2x$, und daher ist $\gamma = \pm 2\sqrt{\lambda}$. Der Punkt $x = -\sqrt{\lambda}$ ist also stabil und der Punkt $x = \sqrt{\lambda}$ instabil.

3.4.5 Beispiel Das Vektorfeld $F(x,y) = \begin{pmatrix} -x(1+y) \\ x-y \end{pmatrix}$ (für $x, y \in \mathbb{R}$) hat zwei Nullstellen, nämlich den Nullpunkt und den Punkt $p = (-1,-1)$. Der entsprechende Fluss hat also zwei Gleichgewichtspunkte. Das Differential des Vektorfeldes an einer Stelle (x,y) lautet $DF_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -(1+y) & -x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. In den Gleichgewichtspunkten haben wir also:

$$DF_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad DF_{(-1,-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Im Nullpunkt haben wir den doppelten Eigenwert -1, der Nullpunkt ist also asymptotisch stabil. Im Punkt p haben wir die Eigenwerte $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Das ist ein positiver und ein negativer Eigenwert. Also ist der Punkt p instabil.

Das Prinzip der linearisierten Stabilität lässt sich mithilfe einer Methode von Ljapunov beweisen.

3.4.6 Satz *Sei F ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit Nullstelle X_0 und $V \in C^1(D, \mathbb{R})$ mit $V(X_0) = 0$ und $V(X) > 0$ für alle $X \neq X_0$.*

1. *Ist $t \mapsto V(\varphi(t,X))$ monoton fallend für alle $X \in D$ und $t \geq 0$, so ist X_0 stabil.*
2. *Ist $t \mapsto V(\varphi(t,X))$ sogar streng monoton fallend für alle $X \neq X_0$ und $t \geq 0$, so ist X_0 asymptotisch stabil.*

Beweis. Wir zeigen nur den ersten Teil. Wählen wir zunächst $\epsilon > 0$ so klein, dass $K_\epsilon(X_0) \subset D$. Auf dem kompakten Rand der Kugel nimmt die Funktion V ein positives Minimum $c_0 > 0$ an. Ausserdem ist $V(X_0) = 0 < c_0$. Also kann man $\delta > 0$ finden, so dass $V(X) < c_0$ für alle $||X - X_0|| < \delta$. Sei jetzt X ein solcher Punkt mit $||X - X_0|| < \delta$. Weil nach Voraussetzung die Funktion V längs der Trajektorien monoton fallend ist, gilt $V(\varphi(t,X)) < c_0$ für alle $t > 0$. Die Trajektorie von X kann also die Kugel $K_\epsilon(X_0)$ für positive Zeiten nicht verlassen, denn auf der Schnittstelle mit dem Rand müsste sie sonst einen Wert $\geq c_0$ annehmen. q.e.d.

Wenden wir diesen Satz von Ljapunov nun an, um zumindest in einem Spezialfall das Prinzip der linearisierten Stabilität zu beweisen.

3.4.7 FOLGERUNG *Sei F ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf der offenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ mit Nullstelle X_0. Das Differential $DF(X_0)$ von F bei X_0 sei diagonalisierbar mit reellen negativen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Nach einem linearen Koordinatenwechsel kann man erreichen, dass die Jacobimatrix A von F bei X_0 Diagonalform hat. Wir wählen als Ljapunov-Funktion jetzt $V(X) := ||X - X_0||^2$ für $X \in D$ und behaupten, dass V längs von Trajektorien von Punkten $X \neq X_0$, die genügend nahe bei X_0 liegen, streng monoton fallend ist. Nach dem Stabilitätssatz von Ljapunov folgt also, dass X_0 asymptotisch stabil ist.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass $t \mapsto V(\varphi(t, X))$ streng monoton fallend ist für X nahe bei X_0. Dies ist nach der Kettenregel gleichbedeutend mit

$$0 > \frac{d}{dt} V(\varphi(t, X)) = \langle \nabla V(\varphi(t, X)), F(\varphi(t, X)) \rangle \, .$$

Einerseits ist hier $\nabla V(X) = 2(X - X_0)$. Andererseits liefert die Dreigliedentwicklung von F folgende Zerlegung von F in ein lineares Vektorfeld und einen nichtlinearen Störterm:

$$F(X_0 + Y) = AY + R(Y) \cdot ||Y|| \, , \quad \text{wobei } \lim_{Y \to 0} R(Y) = 0.$$

Also gilt an der Stelle $X_0 + Y = \varphi(t, X)$

$$\frac{d}{dt} V(\varphi(t, X)) = \langle \nabla V(X_0 + Y), F(X_0 + Y) \rangle = \langle 2Y, AY + R(Y)||Y|| \rangle \, .$$

Bezeichnet $\gamma < 0$ das Maximum der Eigenwerte von A, so gilt die Abschätzung

$$\langle Y, AY \rangle \leq \gamma ||Y||^2 \, .$$

Ausserdem ist nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\langle Y, R(Y) \rangle \leq ||Y|| \cdot ||R(Y)|| \, .$$

Weil $\lim_{Y \to 0} R(Y) = 0$, kann man ein $\epsilon > 0$ finden, so dass für alle $||Y|| < \epsilon$ gilt:

$$||R(Y)|| < \frac{1}{2} |\gamma| \, .$$

Zusammen folgt für alle $||Y|| < \epsilon$:

$$\frac{d}{dt} V(\varphi(t, X)) = 2(\langle Y, AY \rangle + \langle Y, R(Y) \rangle ||Y||) \leq$$

$$2||Y||^2(\gamma + ||R(Y)||) < 2||Y||^2(-|\gamma| + \frac{1}{2}|\gamma|) = -|\gamma| \cdot ||Y||^2 < 0 \, . \qquad \text{q.e.d.}$$

Hier ist noch ein Anwendungsbeispiel der Ljapunov-Methode, bei dem das Prinzip der linearisierten Stabilität nicht funktioniert:

3.4.8 Beispiel Das Vektorfeld $F(x,y) = \begin{pmatrix} -y - x^3 \\ x - y^3 \end{pmatrix}$ auf $\mathbb{R}^2$ hat eine Nullstelle im Nullpunkt. Die Jacobimatrix im Nullpunkt lautet hier: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und hat die Eigenwerte $\pm i$. In diesem Fall macht das Eigenwertstabilitätskriterium also keine Aussage. Aber mit der Ljapunov-Methode kommt man hier trotzdem zum Ziel. Als Ljapunov-Funktion wählen wir $V(x,y) = x^2 + y^2$. Die Positivität ist dann sicher gewährleistet. Ausserdem rechnet man nach

$$\frac{d}{dt}V(\varphi(t,x,y)) = \langle \nabla V(x,y), F(x,y) \rangle = 2x(-y-x^3) + 2y(x-y^3) = -2x^4 - 2y^4 < 0$$

für alle $(x,y) \neq (0,0)$. Also ist der Nullpunkt sogar ein Attraktor.