3.5 Exkurs: Vektorfelder auf Flächen

Ein stetiges Vektorfeld auf einer Fläche M ist definiert als eine stetige Zuordnung $F\colon M \to TM$ mit der Eigenschaft, dass $F(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$. Jedem Punkt der Fläche wird also auf stetige Art ein Tangentialvektor an dieser Stelle zugeordnet. Überträgt man mithilfe einer Kartenabbildung ein Teilstück der Fläche in eine flache offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, so kann man mit dem Differential der Kartenabbildung auch das Vektorfeld auf die Karte übertragen. Ist umgekehrt $\Phi\colon U \to V$ eine bijektive, differenzierbare Abbildung von einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ auf ein Flächenstück $V \subset M$, so liefert jedes Vektorfeld F auf U ein Vektorfeld $\tilde{F}$ auf V, nämlich:

$$\tilde{F}(\Phi(a)) := D\Phi_a(F(a)) \quad \forall a \in U\,.$$

Ist ein Vektorfeld auf M sogar stetig differenzierbar, dann definiert es auch einen Fluss auf M. Dies ergibt sich sofort aus der Beschreibung in den Karten.

Während es zum Beispiel auf dem Torus stetige Vektorfelder gibt, die keine Nullstellen haben, existiert so etwas auf der Kugeloberfläche nicht. Genauer gilt folgendes:

3.5.1 Satz *Jedes stetig differenzierbare Vektorfeld auf S^2 hat mindestens eine Nullstelle.*

Diese bemerkenswerte Aussage ist bekannt unter dem Namen "Igelsatz". Es bedeutet nämlich, dass man einen (kugelförmigen, überall mit Stacheln besetzten) Igel nicht stetig kämmen kann. Wir werden diesen Satz am Ende des Paragraphen beweisen, treffen aber erst einige Vorbereitungen.

Sei zunächst $F\colon D \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge der Ebene.

3.5.2 Definition Sei $\gamma\colon [a, b] \to D$ ein stetig differenzierbarer, geschlossener Weg auf D, auf dem keine Nullstellen von F liegen. Unter dem Index von γ bezogen auf F versteht man die orientierte Anzahl Umläufe, die das Vektorfeld F längs γ macht, oder anders gesagt, die Umlaufzahl von $F \circ \gamma$ um den Nullpunkt in $\mathbb{R}^2$. Wenn wir hier $\mathbb{R}^2$ mit der komplexen Zahlenebene identifizieren, können wir wie in der Funktionentheorie schreiben:

$$\operatorname{index}(\gamma, F) := \nu_{F\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{F\circ\gamma} \frac{dz}{z}\,.$$

Hier sind einige wichtige Eigenschaften des Indexes.

3.5.3 Bemerkung

- *Der Index hängt sowohl von γ als auch von F stetig ab.*
- *Deformiert man den Weg γ, ohne dabei Nullstellen des Vektorfeldes F zu überqueren, dann ändert sich der Index nicht.*
- *Deformiert man das Vektorfeld F stetig, ohne dass während der Deformation längs γ Nullstellen entstehen, dann bleibt der Index von γ dabei unverändert.*

- *Ist γ der Rand einer Kreisscheibe $K_r(p) \subset D$ um eine Nichtnullstelle p, die keine Nullstellen von F enthält, dann ist* $\operatorname{index}(\gamma, F) = 0$.

3.5.4 LEMMA *Ist p eine Nichtnullstelle des Vektorfeldes F, dann kann man F in der Nähe von p stetig in ein konstantes Vektorfeld deformieren, ohne dass dabei unterwegs Nullstellen entstehen.*

Beweis. Weil das Vektorfeld F stetig ist und nach Voraussetzung $F(p) \neq 0$, können wir eine positive Zahl M und eine Kreisscheibe K um p finden, so dass $||F(q)|| > M$ und $||F(q) - F(p)|| < M/2$ für alle $q \in K$. Nun definieren eine stetige Familie von Vektorfeldern F_s (mit $0 \leq s \leq 1$) auf K durch $F_s(q) := F(p) + s(F(q) - F(p))$ für $q \in K$. Offenbar ist F_0 ein konstantes Vektorfeld und $F_1 = F$. Ausserdem hat F_s keine Nullstellen auf K (für jedes s), denn $||F_s(q)|| = ||F(p) + s(F(q) - F(p))|| \geq ||F(p)|| - s\,||F(q) - F(p)|| \geq M - M/2 = M/2 > 0$. q.e.d.

Wir können nun auch jeder isolierten Nullstelle des Vektorfeldes einen Index zuordnen.

3.5.5 DEFINITION Ist p eine isolierte Nullstelle von F, dann setzt man

$$\operatorname{index}(p, F) := \operatorname{index}(\gamma_r, F)\,,$$

wobei $\gamma_r(t) = p + re^{it}$ (für $t \in [0, 2\pi]$) den positiv orientierten Rand einer Scheibe von Radius r um p bezeichnet, die so klein gewählt ist, dass sie keine weiteren Nullstellen von F ausser p enthält. Wie eben bemerkt, hängt der Index nicht von der genauen Wahl von r ab, der Index von p ist also wohldefiniert.

3.5.6 BEISPIELE Ist $F(v) = -v$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$, so ist $\operatorname{index}(0, F) = 1$. Fassen wir dagegen die komplexe Abbildung $G(z) = z^n$ ($\forall z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ fest) als ebenes Vektorfeld auf, so ist $\operatorname{index}(0, G) = n$.

Auf ähnliche Art, wie man den Residuensatz beweist, kann man folgendes zeigen:

3.5.7 SATZ *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein sternförmiges offenes Gebiet und $F\colon D \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit nur endlich vielen Nullstellen. Ist γ eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve in D, so gilt*

$$\operatorname{index}(\gamma, F) = \sum_{k=1}^{r} \operatorname{index}(p_k, F)\,,$$

wobei $p_1, \ldots, p_r$ diejenigen Nullstellen von F bezeichnet, die im Innern von γ liegen.

3.5.8 FOLGERUNG *Ist der Index einer einfach geschlossenen Kurve bezogen auf F ungleich 0, so enthält γ im Innern mindestens eine Nullstelle von F.*

Betrachten wir nun Vektorfelder auf der 2-Sphäre.

3.5.9 Satz *Ist F ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf S^2 mit nur endlich vielen Nullstellen $p_1, \ldots, p_n$, dann gilt:*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{index}(p_k, F) = 2\,.$$

Insbesondere hat jedes stetig differenzierbare Vektorfeld auf S^2 mindestens eine Nullstelle.

Die Summe des Indizes sämtlicher Nullstellen ist also unabhängig von der Wahl des Vektorfeldes. Sie stimmt überein mit der sogenannten *Eulercharakteristik* der 2-Sphäre. Allgemeiner gilt folgendes:

3.5.10 Satz *Ist M eine glatte, geschlossene (d.h. kompakt ohne Rand) Fläche und F ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf M mit nur endlich vielen Nullstellen $p_1, \ldots, p_n$, dann ist*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{index}(p_k, F) = \chi(M)\,.$$

Dabei ist $\chi(M)$ eine Zahl, die nur von M abhängt. Man nennt diese Zahl die Eulercharakteristik von M. Zum Beispiel ist die Eulercharakteristik des Torus gleich 0 *und $\chi(S^2) = 2$.*

Bevor wir den Satz über Vektorfelder auf der Kugeloberfläche beweisen, schauen wir uns zwei Beispiele genauer an.

3.5.11 Beispiele Sei zuerst F ein Vektorfeld auf S^2, dessen Flusslinien die Längengrade sind und mit zwei Nullstellen im Nord- und im Südpol. Wenn man das Vektorfeld jeweils in Karten um die Pole anschaut, stellt man fest, dass die beiden Indizes jeweils gleich 1 sind. In der Summe kommen wir also wie behauptet auf 2.

Gehen wir jetzt von einem konstanten Vektorfeld auf der Ebene aus. Die Flusslinien sind also parallele Geraden. Durch Umkehrung der stereographischen Projektion wird daraus ein Vektorfeld auf S^2. Die Flusslinien dieses Vektorfeldes bilden eine Schar von Kreisen, die sich alle im Nordpol berühren. Hier haben wir nur eine Nullstelle, nämlich den Nordpol, und der Index dieser Nullstelle ist gleich 2.

Hier nun der angekündigte Beweis von Satz 3.5.9:

Beweis. Nehmen wir an, das Vektorfeld F auf S^2 habe nur endlich viele Nullstellen. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass der Südpol keine Nullstelle ist. Also können wir (nach dem obigen Lemma) F in einer kleinen Umgebung um den Südpol herum so deformieren, dass F in einer passenden Karte des Südpols als konstantes, nichtverschwindendes Vektorfeld erscheint. Die Fortsetzung dieses konstanten Vektorfeldes auf die gesamte Ebene liefert auf S^2 ein Vektorfeld, das wir $\tilde{F}$ nennen wollen.

Sei jetzt γ ein positiv orientierter Kreis in dieser kleinen Südpolumgebung. Zeichnen wir diesen Kreis in der Nordpolkarte, enthält er dort sämtliche Nullstellen

$p_1, \ldots, p_n$ von F. Nach dem oben angegebenen Satz gilt für den Index von γ bezogen auf F in der Nordpolkarte:

$$\operatorname{index}(\gamma, F) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{index}(p_k, F)\,.$$

Andererseits ist, wie im obigen Beispiel gezeigt, wiederum in der Nordpolkarte

$$\operatorname{index}(\gamma, \tilde{F}) = 2\,.$$

Weil längs γ das Vektorfeld F mit $\tilde{F}$ übereinstimmt, müssen auch die Indizes übereinstimmen, und daraus folgt die Behauptung. q.e.d.

3.5.12 Folgerung *Sei $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit nur endlich vielen kritischen Punkten. Dann gilt:*

$$\operatorname{index}(p, \nabla f) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f \text{ bei } p \text{ ein lokales Extremum hat} \\ -1 & \text{falls } f \text{ bei } p \text{ einen Sattelpunkt hat} \end{cases}$$

Bezeichnen m_1, m_2 und m_3 jeweils die Anzahlen der lokalen Maxima, der lokalen Minima und der Sattelpunkte von f, dann ist:

$$m_1 + m_2 - m_3 = 2\,.$$

Beweis. Siehe Übungsaufgabe. Hier kann man die Methode von Ljapunov verwenden und f als Ljapunov-Funktion benutzen. q.e.d.

3.5.13 Beispiel Die Funktion $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$ hat auf S^2 6 Maxima, nämlich $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$, die den Ecken eines auf S^2 projizierten Oktaeders entsprechen. Die Minima korrespondieren zu den Flächenmittelpunkten und die Sattelpunkte zu den Kantenmittelpunkten des Oktaeders. Die Aussage $m_1 + m_2 - m_3 = 2$ stimmt hier also überein mit der Eulerschen Polyederformel für das Oktaeder.

3.6 Grenzmengen und Grenzzykel

Betrachten wir jetzt ein stetig differenzierbares Vektorfeld F, definiert auf einer offenen Teilmenge D von $\mathbb{R}^2$. Bezeichne wieder φ den zugehörigen Fluss. Sei ausserdem K eine kompakte zusammenhängende Teilmenge von D. In diesem Paragraphen wollen wir das Grenzverhalten von Bahnen untersuchen, die ab einem gewissen Zeitpunkt das Kompaktum K nicht mehr verlassen.

3.6.1 Lemma *Das maximale Definitionsintervall der Lösung γ_X der Differentialgleichung $Y'(t) = F(Y(t))$ zur Anfangsbedingung $Y(0) = X$ sei (ω^-, ω^+). Ist $\omega^+ < \infty$, so gibt es ein $t_1 < \omega^+$ mit $\gamma_X(t) \notin K$ für alle $t > t_1$. Das bedeutet, dass die Kurve das Kompaktum K zum Zeitpunkt t_1 für immer verlässt. Man spricht auch davon, dass die Kurve γ_X eine endliche Fluchtzeit (nämlich t_1) hat.*

Beweis. Wenn ω^+ endlich ist, kann die Bahn von X nicht geschlossen sein. Nehmen wir nun an, die Aussage des Lemmas sei falsch. Dann kehrt die Kurve also immer wieder in das Kompaktum zurück. Wir können deshalb eine Folge t_n konstruieren, die gegen ω^+ konvergiert und so dass $\gamma(t_n) \in K$ ist. Weil K kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $\gamma(t_{n_j})$. Der Grenzwert sei $a = \lim_{j\to\infty} \gamma(t_{n_j})$. Weil γ stetig ist, folgt daraus

$$\lim_{t\to\omega^+} \gamma(t) = a\,.$$

Die Kurve γ wäre also stetig fortsetzbar nach ω^+ und dort ebenfalls eine Lösung. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. q.e.d.

Nehmen wir jetzt an, die Bahn des Punktes $X \in K$ verlasse das Kompaktum ab einem gewissen Zeitpunkt t_1 nicht mehr, genauer: $\varphi(t, X) \in K$ für alle $t \geq t_1$. Dann ist $\omega^+ = \infty$.

3.6.2 Definition Unter der *Grenzmenge* von X verstehen wir die Menge

$$G(X) := \{p \in K \mid \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, X) = p \text{ für eine Folge } t_n \to \infty\}\,.$$

Der folgende Satz stammt von Poincaré und Bendixson.

3.6.3 Satz *Wenn das Kompaktum K keine Nullstelle von F enthält, dann ist $G(X)$ eine geschlossene Bahn, der sogenannte Grenzzykel. Insbesondere gibt es also periodische Bahnen in K.*

3.6.4 Beispiel Die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - (x^2 + y^2 - 1)x \\ -x - (x^2 + y^2 - 1)y \end{pmatrix}$$

beschreibt einen Strudel. Sie hat offenbar den Nullpunkt als stationäre Lösung. Wenn wir vom Nullpunkt absehen, können wir die Differentialgleichung in Polarkoordinaten umschreiben, und erhalten das Gleichungssystem

$$\dot{\varphi} = -1 \quad \text{und} \quad \dot{r} = -r(r^2 - 1)\,.$$

Also ist jedenfalls $\varphi(t) = -t + c_1$ (c_1 Konstante). Der Radius r in Abhängigkeit von φ erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{dr}{d\varphi} = r(r^2 - 1)\,.$$

Die Lösung der Differentialgleichung in Polarkoordinaten lautet also

$$\varphi(t) = -t + c_1 \quad \text{und} \quad r(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - ce^{-2t}}}\,, \quad \text{wobei } t > \tfrac{1}{2}\ln(c), \text{ falls } c > 0.$$

Es gibt also eine geschlossene Bahn, nämlich den Einheitskreis, der im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Die Bahnen ausserhalb des Einheitskreises sind Spiralen, die für $t \to \infty$ sich immer enger um den Einheitskreis winden. Die Bahnen innerhalb des Einheitskreises sind Spiralen, die für $t \to -\infty$ gegen den Nullpunkt konvergieren, und für $t \to \infty$ gegen den Einheitskreis strudeln.

Die analoge Aussage des Satzes von Poincaré und Bendixson gilt auch für die 2-Sphäre, aber sie ist falsch für den Torus (und alle anderen geschlossenen Flächen ausser der 2-Sphäre). Denn auf dem Torus gibt es Vektorfelder, die weder Nullstellen noch geschlossene Bahnen haben. Der Beweis des Satzes für $\mathbb{R}^2$ beruht auf dem Jordanschen Kurvensatz, der für den Torus nicht gilt.

3.6.5 Satz *Jede einfach geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$ zerlegt die Ebene in zwei Gebiete, ein beschränktes Inneres und ein unbeschränktes Äusseres. Jede einfach geschlossene Kurve auf S^2 zerlegt die Kugeloberfläche in zwei Gebiete, ein rechtes und ein linkes.*

Beweis des Satzes von Poincaré und Bendixson. Nehmen wir an, eine bestimmte Bahn B des Vektorfeldes bleibe im Kompaktum für alle $t > t_0$. Wenn B bereits eine geschlossene Bahn ist, brauchen wir nichts mehr zu zeigen.

Gehen wir nun davon aus, dass B nicht geschlossen ist und treffen wir einige Vorbereitungen. Weil das Vektorfeld F in K keine Nullstellen hat, gibt es zu jedem Punkt $q \in K$ eine Umgebung, in der die Richtung von F fast konstant ist (zum Beispiel höchstens um ein Grad schwankt). Wir können die Umgebung als ein Viereck V_q wählen, das auf zwei gegenüberliegenden Seiten von Bahnabschnitten und auf den zwei anderen Seiten von zu sämtlichen Bahnen transversalen Strecken berandet wird. Ein solches Viereck V_q nennen wir eine *Flowbox.* Weil das Vektorfeld auf der Flowbox fast parallel ist, treten alle Bahnen auf der einen transversalen Seite ein und verlassen die Box wieder auf der gegenüberliegenden Seite.

Weil K kompakt ist, können wir eine endliche Auswahl an Flowboxen finden, die bereits ganz K überdecken. Dann gibt es mindestens eine Flowbox, in die B unendlich oft zurückkehrt. Diese Flowbox V sei nun ausgezeichnet. Ausserdem markieren wir einen Punkt X_0, in dem die Bahn B auf die Eingangsseite von V trifft. Von X_0 aus durchquert die Bahn die Box und kehrt nach einer gewissen Zeit $T_R(X_0)$ wieder erstmals in die Box zurück. Sei $X_1 = \varphi(T_R(X_0), X_0)$ der entsprechende Wiedereintrittspunkt auf der Transversalen. Wir können das Koordinatensystem so einrichten, dass X_0 der Nullpunkt und die Eingangsseite der Flowbox ein Abschnitt auf der x-Achse ist, wobei $X_1 > X_0$. Dann muss für die y-Koordinate gelten: $y(\varphi(T_R(X), X) = 0$. Die Funktion T_R ist implizit durch diese Gleichung festgelegt und hängt daher stetig von X ab.

Verbinden wir jetzt den Abschnitt der Bahn von X_0 bis X_1 mit dem geradlinigen Stück auf der Transversalen von X_1 nach X_0, so erhalten wir eine einfach geschlossene Kurve. Nach dem Jordanschen Kurvensatz kann die Bahn von X_1 aus nicht mehr in das Innere dieser Kurve zurückgelangen. Bei der nächsten Rückkehr an der Stelle X_2 in die Flowbox muss also $X_2 > X_1$ sein. Entsprechend erhalten wir durch Markieren der Rückkehrstellen eine monoton wachsende Folge von Punkten auf der x-Achse

$$X_{n+1} := \varphi(T_R(X_n), X_n) =: \Pi(X_n)\,.$$

Weil V kompakt ist, konvergiert die Folge der X_n gegen einen Grenzpunkt $a \in G(X)$. Die Zuordnung Π hängt (nach dem Satz über implizite Funktionen) stetig von X_n ab. Also folgt

$$\Pi(a) = \lim_{n\to\infty} \Pi(X_n) = \lim_{n\to\infty} X_{n+1} = a\,.$$

Das bedeutet aber, dass die Bahn des Punktes a geschlossen ist. Weil die Grenzmenge $G(X)$ ausserdem zusammenhängend ist, folgt nun die Behauptung. q.e.d.

Hier zum Abschluss noch ein Anwendungsbeispiel.

3.6.6 Beispiel Die folgende Differentialgleichung modelliert (nach Selkov) die chemische Reaktion Glykolyse. Dabei bezeichnen x und y die Konzentrationen der beteiligten Stoffe ADP und F6P.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F(x,y) = \begin{pmatrix} -x + (a + x^2)y \\ b - (a + x^2)y \end{pmatrix} ,$$

wobei a, b positive Konstanten sind. Diese Differentialgleichung hat genau eine stationäre Lösung bei $p = (b, b/a + b^2)$. Der Punkt p ist abstossend, falls $b^2(2 - a - b^2) > (1 + a)(a + b^2)$. Sei jetzt K das kompakte Gebiet im ersten Quadranten, das durch die Geraden $x = 0$, $y = 0$, $y = c_1 - x$ und $y = c_2 + x$ begrenzt wird. Wählt man die Konstanten c_1, c_2 gross genug, dann zeigt das Vektorfeld F auf dem Rand von K stets ins Innere. Also bleibt eine Bahn durch einen Punkt in K auf jeden Fall für alle Zukunft im Gebiet K. Weil der stationäre Punkt p im Innern abstossend ist, gibt es eine Bahn, ausgehend von einem Punkt in K, die eine passend gewählte kleine Kreisscheibe um p ab einem Zeitpunkt t_0 für immer verlässt. Das Innere dieser Kreisscheibe schneiden wir aus K aus und erhalten ein neues Kompaktum, auf das wir den Satz von Poincaré und Bendixson anwenden können. Also gibt es im Gebiet K eine geschlossene Bahn.