Kapitel 4
Variationsrechnung

Die Variationsrechnung wurde entwickelt, um Fragen zu lösen, bei denen extremale Kurven gesucht sind. Hier einige typische Fragen dieser Art:

- Welches ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in der Ebene oder im Raum?

- Was ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf der Erdkugel?

- Welchen Verlauf hat diejenige Bahn zwischen zwei vorgegebenen Punkten A, B, längs der eine nur unter dem Einfluss der Schwerkraft rollende Kugel in der kürzesten Zeit von A nach B gelangt.

- Unter allen einfach geschlossenen Kurven vorgegebener Länge umschliesst welche den grössten Flächeninhalt?

Die Antwort auf die erste und zweite Frage können wir sofort geben. Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in der Ebene oder im Raum ist die geradlinige, während auf der Erdkugel Abschnitte aus Grosskreisen die optimalen Verbindungswege sind. Allerdings gibt es zwischen zwei Punkten auf der Kugeloberfläche nur dann eine eindeutige kürzeste Verbindung, wenn die Punkte sich nicht antipodal gegenüberliegen. Betrachtet man nämlich zum Beispiel den Nord- und den Südpol, so gibt es offenbar unendlich viele kürzeste Verbindungswege, nämlich sämtliche Längengrade. Nicht jedes Variationsproblem hat also eine eindeutige Lösung.

Das dritte dieser Probleme nennt man das Problem der Brachistochrone, und es kann als einer der Ausgangspunkte der Variationsrechnung gelten, denn Johann Bernoulli entwickelte Ende des 17. Jahrhunderts die entsprechenden Methoden, um eben dieses Problem damit zu lösen. Auf die Lösung dieses klassischen Problems werden wir später wieder zurückkommen.

Das letzte Problem schliesslich ist ein Beispiel für eine Fragestellung, bei der eine Nebenbedingung eine Rolle spielt, hier ist es die Vorgabe der Gesamtlänge der Kurve. Auch diese Frage werden wir später wieder aufgreifen. Doch zunächst beginnen wir mit einigen begrifflichen Vorbereitungen.

4.1 Euler-Lagrange-Gleichungen

Wir können die zu Anfang des Kapitels erwähnten Probleme der Variationsrechnung, bei denen es jeweils um Suche nach extremalen Kurven ging, als Extremwertaufgaben für Funktionale auf Banachräumen auffassen. Damit ist folgendes gemeint: Sei

B ein Banachraum, $Z \subset B$ eine Teilmenge und $I: Z \to \mathbb{R}$ eine vorgegebenes Funktional.

Frage: *Nimmt das Funktional I auf Z ein Maximum oder ein Minimum an, und wenn ja, an welchen Stellen?*

4.1.1 Beispiele

- Sei $B = C^1([0,1], \mathbb{R}^n)$ der Banachraum der stetig differenzierbaren Wege im $\mathbb{R}^n$ mit der Norm $||\cdot||_1$. Die Frage nach dem kürzesten glatten Verbindungsweg zwischen zwei vorgegebenen Punkten p, q im Raum $\mathbb{R}^n$ können wir so formulieren: Wir suchen das Minimum des Funktionals Weglänge
$$I(\gamma) := \int_0^1 ||\dot{\gamma}(t)||\, dt$$
auf der Teilmenge $Z := \{\gamma \in B \mid \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$.

- Seien p, q zwei verschiedene Punkte auf der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und $B = C^1([0,1], \mathbb{R}^3)$. Fragen wir nach den kürzesten glatten Wegen von p nach q auf der Einheitssphäre, so suchen wir diejenigen Wege in der Teilmenge
$$Z := \{\gamma: [0,1] \to S^2 \mid \gamma \in B, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\},$$
für die das Funktional Weglänge minimal ist.

- Seien $a < b \in \mathbb{R}$ vorgegeben und $B = \{f \in C^1([a,b], \mathbb{R}) \mid f(a) = 0 = f(b)\}$. Sei weiter Z die Teilmenge der Funktionen in B, deren Graph eine vorgegebene Länge L hat. Die Suche nach denjenigen solchen Graphen, die mit der x-Achse die grösste Fläche einschliessen, führt auf die Frage nach den Maxima des Funktionals
$$I(f) := \int_a^b |f(x)|\, dx\,.$$

Wir wollen nun den Begriff des lokalen Extremwertes und das dazugehörige notwendige Kriterium für differenzierbare Funktionen in mehreren Variablen auf Funktionale auf Banachräumen verallgemeinern.

Dazu sei zunächst $B = C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ der Banachraum der stetig differenzierbaren Kurven im $\mathbb{R}^n$, und γ eine Kurve mit vorgegebenem Anfangs- und Endpunkt $\gamma(a) = p$ und $\gamma(b) = q$. Wir betrachten nun eine weitere Kurve $\eta \in B$ mit $\eta(a) = 0 = \eta(b)$. Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}$ definieren wir die Kurve $\gamma_\epsilon \in B$ durch
$$\gamma_\epsilon(t) := \gamma(t) + \epsilon\eta(t) \quad \text{für alle } t \in [a,b].$$
Es gilt
$$||\gamma_\epsilon - \gamma||_1 = ||(\gamma + \epsilon \cdot \eta) - \gamma||_1 = |\epsilon| \cdot ||\eta||_1\,.$$
Ist also $|\epsilon|$ klein genug, so liegt γ_ϵ "nahe" bei γ. Wir haben auf diese Weise eine Schar von Kurven in der Nachbarschaft von γ konstruiert. Man spricht auch von einer *Variation* der Kurve γ, und zwar in der *Richtung* von η. Denn die Kurve η können wir als "Tangentialvektor" an die Menge $Z \subset B$ der Kurven von p nach q auffassen.

Ist $I\colon Z \to \mathbb{R}$ ein Funktional, so hängt der Ausdruck $I(\gamma_\epsilon)$ (bei festgewählten Kurven γ, η) nur von ϵ ab. Wir erhalten also eine Funktion g in einer Variablen, nämlich $g(\epsilon) := I(\gamma + \epsilon\eta)$. Ist diese Funktion an der Stelle $\epsilon = 0$ differenzierbar, so setzen wir

$$\partial_\eta I(\gamma) := g'(0) = \frac{d}{d\epsilon} I(\gamma + \epsilon\eta)|_{\epsilon=0}\,.$$

Man bezeichnet $\partial_\eta I(\gamma)$ als die *Variationsableitung* von I in Richtung von η an der Stelle γ.

Sei jetzt B ein beliebiger Banachraum und Z eine Teilmenge von B. Wir fixieren einen linearen Unterraum $V \subset B$, derart dass $\varphi \pm \epsilon\eta \in Z$ für alle $\varphi \in Z$, $\eta \in V$ und genügend kleine $\epsilon > 0$.

4.1.2 Definition Unter der *Variationsableitung* eines Funktionals $I\colon Z \to \mathbb{R}$ in *Richtung* von $\eta \in V$ an der Stelle $\varphi \in Z$ verstehen wir

$$\partial_\eta I(\varphi) := \frac{d}{d\epsilon} I(\varphi + \epsilon\eta)|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{I(\varphi + \epsilon\eta) - I(\varphi)}{\epsilon}\,,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Ist $B = V = \mathbb{R}^n$ und Z eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, so stimmt der Begriff der Variationsableitung mit dem der Richtungsableitung überein.

4.1.3 Beispiel Sei $B = C^0([a,b], \mathbb{R}) = Z = V$ und $f \in B$ fest gewählt. Sei weiter $I\colon B \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$I(\varphi) := \int_a^b \varphi(x) f(x) dx\,.$$

Dann gilt für jede "Richtung" $\eta \in B$:

$$\partial_\eta I(\varphi) = \frac{d}{d\epsilon} I(\varphi + \epsilon\eta)|_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon}\left(\int_a^b (\varphi(x) + \epsilon\eta(x)) f(x) dx\right)|_{\epsilon=0} =$$

$$\frac{d}{d\epsilon}\left(\epsilon \cdot \int_a^b \eta(x) f(x) dx\right)|_{\epsilon=0} = \int_a^b \eta(x) f(x) dx = I(\eta)\,.$$

Also existieren sämtliche Variationsableitungen von I, und die Zuordnung

$$\partial I(\varphi)\colon V \to \mathbb{R}, \quad \eta \mapsto \partial_\eta I(\varphi) = I(\eta)$$

stimmt (für jedes $\varphi \in Z$) mit I überein. Entsprechendes gilt für alle linearen Funktionale.

4.1.4 Definition Man sagt, ein Funktional $I\colon Z \to \mathbb{R}$ habe bei $\varphi \in Z$ ein lokales Maximum (bzw. Minimum), falls ein $\epsilon_0 > 0$ existiert, so dass

$$I(\varphi) \geq I(\varphi + \epsilon\eta) \qquad (\text{bzw.} \quad I(\varphi) \leq I(\varphi + \epsilon\eta)\ )$$

für alle $\eta \in V$ mit $||\eta|| \leq 1$ und alle $\epsilon \in \mathbb{R}$ mit $|\epsilon| < \epsilon_0$.

4.1.5 Satz *Sei $I\colon Z \to \mathbb{R}$ ein Funktional, dessen sämtliche Variationsableitungen auf ganz Z existieren. Hat das Funktional I bei $\varphi \in Z$ ein lokales Maximum oder Minimum, so gilt für alle $\eta \in V$*

$$\partial_\eta I(\varphi) = 0\,.$$

Beweis. Sind $\varphi \in Z$ und $\eta \in V$ fest gewählt, so definiert der Ausdruck $g(\epsilon) := I(\varphi + \epsilon\eta)$ eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nach Voraussetzung bei $\epsilon = 0$ differenzierbar ist und an dieser Stelle ein lokales Extremum hat. Also folgt $g'(0) = \partial_\eta I(\varphi) = 0$. q.e.d.

Betrachten wir nun konkreter eine Klasse von Funktionalen, die durch Integralausdrücke gegeben sind, und bestimmen ihre Variationsableitungen. Sei dazu $B = C^0([a,b],\mathbb{R})$, $Z \subset \{\varphi \in B \mid \varphi \in C^2((a,b),\mathbb{R}), \varphi(a) = c, \varphi(b) = d\}$ ($c, d \in \mathbb{R}$ fest gewählt) und $V = \{\eta \in B \cap C^2((a,b),\mathbb{R}) \mid \eta(a) = 0 = \eta(b)\}$ der Unterraum der "zulässigen Variationen". Sei weiter $I\colon Z \to \mathbb{R}$ das Funktional, definiert durch

$$I(\varphi) := \int_a^b L(x, \varphi(x), \varphi'(x))dx\,,$$

wobei $L \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion in drei Variablen sei.

4.1.6 Beispiel Seien $p = (a, y_1)$, $q = (b, y_2)$, und $Z = \{\gamma \in B \mid \gamma(a) = y_1, \gamma(b) = y_2\}$. Wählen wir $L(x,y,z) = \sqrt{1+z^2}$, so misst das entsprechende Funktional

$$I(\gamma) = \int_a^b L(x, \varphi(x), \varphi'(x))dx = \int_a^b \sqrt{1 + \varphi'(x)^2}dx$$

die Weglänge des Funktionsgraphen von γ, der die Punkte p und q miteinander verbindet.

Nun zur Variationsableitung. Wählen wir $\varphi \in Z$ und $\eta \in V$ und setzen ein, so erhalten wir für $\epsilon \in \mathbb{R}$:

$$I(\varphi + \epsilon\eta) = \int_a^b L(x, \varphi(x) + \epsilon\eta(x), \varphi'(x) + \epsilon\eta'(x))dx\,.$$

Daraus folgt, weil der Integrand stetig differenzierbar ist,

$$\frac{d}{d\epsilon} I(\varphi + \epsilon\eta) = \int_a^b \frac{d}{d\epsilon} L(x, \varphi(x) + \epsilon\eta(x), \varphi'(x) + \epsilon\eta'(x))dx\,.$$

Nach der Kettenregel und durch partielle Integration erhalten wir hieraus:

$$\frac{d}{d\epsilon} I(\varphi + \epsilon\eta) = \int_a^b \eta(x)\partial_2 L(x, \varphi(x) + \epsilon\eta(x), \varphi'(x) + \epsilon\eta'(x))$$

$$+\eta'(x)\partial_3 L(x, \varphi(x) + \epsilon\eta(x), \varphi'(x) + \epsilon\eta'(x))]dx =$$

$$\int_a^b \eta(x)[\partial_2 L(x,\varphi(x),\varphi'(x)) - \frac{d}{dx}\partial_3 L(x,\varphi(x),\varphi'(x))]\,dx +$$
$$\eta(x)\partial_3 L(x,\varphi(x),\varphi'(x))|_a^b\,.$$

Berücksichtigt man nun noch, dass nach Voraussetzung $\eta(a) = 0 = \eta(b)$, ergibt sich:

$$\partial_\eta I(\varphi) = \int_a^b \eta(x)[\partial_2 L(x,\varphi(x),\varphi'(x)) - \frac{d}{dx}\partial_3 L(x,\varphi(x),\varphi'(x))]\,dx\,.$$

Wir erhalten also folgendes Kriterium.

4.1.7 SATZ *Hat das durch die Funktion L definierte Funktional I bei $\varphi \in Z$ ein lokales Extremum, so gilt für alle $\eta \in V$:*

$$\int_a^b \eta(x)[\partial_2 L(x,\varphi(x),\varphi'(x)) - \frac{d}{dx}\partial_3 L(x,\varphi(x),\varphi'(x))]\,dx = 0\,.$$

Der in eckigen Klammern stehende Ausdruck beschreibt eine stetige Funktion in x. Dies ergibt sich sofort aus den Voraussetzungen an φ und an L. Also können wir mit dem folgenden *Lemma der Variationsrechnung* schliessen, dass dieser Ausdruck für alle x verschwinden muss.

4.1.8 LEMMA *Sei $f \in C^0[a,b]$ eine stetige Funktion, und es gelte*

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = 0 \quad \text{für alle } \eta \in C^0([a,b],\mathbb{R}) \cap C^\infty((a,b),\mathbb{R}) \text{ mit } \eta(a) = \eta(b) = 0.$$

Dann ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

Beweis. Hier ist es ganz wichtig vorauszusetzen, dass f stetig ist. Sonst wäre die Aussage i.a. nicht richtig. Wir beweisen die Behauptung durch Widerspruch und nehmen an, dass f nicht überall verschwindet. Sei etwa $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) =: m > 0$. (Andernfalls betrachten wir $-f$.) Weil f stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(x_0)| < \frac{m}{2}\,.$$

Also gilt $f(x) > \frac{m}{2} > 0$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Jetzt wählen wir eine Hügelfunktion $0 \le \eta \in C^\infty[a,b]$ mit $\eta(x) = 0$ für $x \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ und $\int_a^b \eta(x)dx = 1$. Dann erhalten wir

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\eta(x)dx > \frac{m}{2}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \eta(x)dx = \frac{m}{2} > 0\,.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. q.e.d.

4.1.9 FOLGERUNG *Hat das durch die sogenannte Lagrangefunktion L definierte Funktional $I\colon Z \to \mathbb{R}$ bei $\varphi \in Z$ ein lokales Extremum, dann erfüllt φ die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung:*

$$\partial_2 L(x, \varphi(x), \varphi'(x)) - \frac{d}{dx}\partial_3 L(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Diese Differentialgleichung wird als Euler-Lagrange-Gleichung bezeichnet.

Wenden wir dies Kriterium nun an, um einige Variationsaufgaben zu behandeln.

4.1.10 BEISPIELE

- Seien wie eben $p = (a, y_1)$ und $q = (b, y_2)$ vorgegebene Punkte in $\mathbb{R}^2$ $(a < b)$ und sei $Z = \{\varphi \in C^2[a, b] \mid \varphi(a) = y_1, \varphi(b) = y_2\}$. Wie schon bemerkt, sind die dazugehörigen Graphen Wege von p nach q. Betrachten wir wieder das Funktional

$$I(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + \varphi'(x)^2}\, dx\,,$$

das die Weglänge des Funktionsgraphen angibt. Wir wissen bereits, dass der kürzeste Verbindungsweg von p nach q der Geradlinige ist. Überprüfen wir, ob die Lösung der entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichung zu demselben Resultat führt.

Das Funktional I wird durch die Funktion $L(x, y, z) = \sqrt{1 + z^2}$ definiert. Die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung lautet also

$$\partial_2 L(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0 = \frac{d}{dx}\partial_3 L(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = \frac{d}{dx}\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1 + \varphi'(x)^2}}\,.$$

Da dies für alle x gilt, folgt

$$\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1 + \varphi'(x)^2}} = c_1 \quad \text{für eine Konstante } c_1 \in \mathbb{R}.$$

Hieraus ergibt sich $\varphi'(x) = \pm\sqrt{\frac{c_1^2}{1-c_1^2}} =: c_2$, und daraus $\varphi(x) = c_2 x + c_3$ $(c_2, c_3 \in \mathbb{R})$. Berücksichtigt man nun noch die Randbedingungen, erhält man eine eindeutige Lösung φ der Euler-Lagrange-Gleichung in Z, nämlich

$$\varphi(x) = \frac{y_2 - y_1}{b - a}(x - a) + y_1\,.$$

Der entsprechende Funktionsgraph ist wie erwartet die Strecke, die die vorgegebenen Punkte p und q miteinander verbindet.

- Sei jetzt $L(x, y, z) = y^2 + z^2$ und

$$I(\varphi) := \int_0^1 (\varphi(x)^2 + \varphi'(x)^2)\, dx$$

und $Z = \{\varphi \in B \mid \varphi(0) = y_1, \varphi(1) = y_2.\}$. Nun lautet die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung:

$$2\varphi(x) = \frac{d}{dx}(2\varphi'(x)) = 2\varphi''(x)\,.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist:

$$\varphi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})\,.$$

Die Konstanten c_1, c_2 sind durch die Randbedingungen festgelegt: $\varphi(0) = c_1 + c_2 = y_1$ und $\varphi(1) = c_1 e + c_2 e^{-1} = y_2$. Dies Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung, da $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e & e^{-1} \end{pmatrix} = e^{-1} - e \neq 0$. Also gibt es genau einen Kandidaten für eine lokale Extremalkurve. Tatsächlich nimmt das Funktional I an dieser Stelle sein Minimum an. Konkret ist zum Beispiel für $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ die Minimalkurve $\varphi(x) = \frac{2e}{e^2-1}\sinh(x)$, und für $y_1 = y_2 = 1$ ist $\varphi(x) = \frac{2\sqrt{e}}{e+1}\cosh(x - \frac{1}{2})$.

- Betrachten wir jetzt
$$I(\varphi) := \int_0^1 (\varphi(x)^2)\, dx$$
und $Z = \{\varphi \in B \mid \varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1.\}$. Nun lautet die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung:
$$2\varphi(x) = 0\,.$$
Es gibt also hier keine Lösung, die zu den Randbedingungen passt. Tatsächlich nimmt I bei keiner stetigen Funktion ein Minimum an. Die optimale Kurve müsste entlang der x-Achse verlaufen und bei $x = 1$ auf das Niveau 1 springen, ist also nicht stetig. Dies ist ein Beispiel für ein schlecht gestelltes Variationsproblem.

Die bisherigen Überlegungen lassen sich auch auf durch Integralausdrücke definierte Funktionale auf dem Raum $B = C^0([a,b], \mathbb{R}^n)$ der stetigen Kurven im $\mathbb{R}^n$ ausdehnen. Sei dazu $Z \subset \{\varphi \in B \cap C^2((a,b), \mathbb{R}^n) \mid \varphi(a) = p, \varphi(b) = q\}$ ($p, q \in \mathbb{R}^n$ fest gewählt) und $V = \{\eta \in B \cap C^2((a,b), \mathbb{R}^n) \mid \eta(a) = 0 = \eta(b)\}$ der Unterraum der zulässigen Variationen. Sei $I\colon Z \to \mathbb{R}$ ein Funktional der Form

$$I(\varphi) := \int_a^b L(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))\, dt = \int_a^b L(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t), \dot{\varphi}_1(t), \ldots, \dot{\varphi}_n(t))\, dt\ ,$$

wobei L eine zweimal stetig differenzierbare Funktion in $2n+1$ Variablen sei. Dann lautet das Resultat, das der obigen Folgerung entspricht:

4.1.11 Satz *Hat das durch die Lagrangefunktion L definierte Funktional bei $\varphi \in Z$ ein lokales Extremum, so erfüllt φ die folgenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung:*

$$\partial_{j+1} L(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) = \frac{d}{dt}\partial_{j+n+1} L(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \qquad \text{für alle } t \in [a,b],\ j = 1, \ldots, n.$$

Dies sind die Euler-Lagrange-Gleichungen.

Beweis. Hat I bei φ ein lokales Extremum, dann ist $\partial_\eta I(\varphi) = 0$ für alle zulässigen η. Insbesondere gilt dies für die Störung $\eta_j(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \eta(t) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei der Eintrag $\eta(t)$ an der j-ten Stelle steht und j ein Index zwischen 1 und n ist. Nun folgt wie im eindimensionalen Fall, dass gilt

$$\partial_{\varphi_j} L(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) = \frac{d}{dt} \partial_{\dot{\varphi}_j} L(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \quad \forall t\,.$$

q.e.d.

Diese Differentialgleichungen begegnen uns zum Beispiel in der klassischen Mechanik. Nehmen wir an, die Funktion $\varphi\colon [0, T] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, beschreibe die räumliche Bewegung eines Massenpunktes. Nach dem Hamiltonschen Prinzip verläuft eine solche Bewegung stets so, dass das *Wirkungsintegral*

$$W(\varphi) = \int_0^T (E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}})dt$$

sein Minimum annimmt. Hier bezeichnet E_{kin} die kinetische Energie, also

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2)\,.$$

Und $E_{\text{pot}} = U(\varphi(t))$ bezeichnet die potentielle Energie. Also löst φ die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen, nämlich:

$$\begin{array}{rcl} -\partial_x U(\varphi(t)) & = & \frac{d}{dt} m\dot{x}(t) \\ -\partial_y U(\varphi(t)) & = & \frac{d}{dt} m\dot{y}(t) \\ -\partial_z U(\varphi(t)) & = & \frac{d}{dt} m\dot{z}(t) \end{array}$$

Oder anders geschrieben:

$$-\operatorname{grad} U(\varphi(t)) = m\frac{d^2}{dt^2}(\varphi(t)) \qquad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Dies ist nichts anderes als die Newtonsche Bewegungsgleichung.