Kapitel 5
Partielle Differentialgleichungen

Wir werden uns exemplarisch mit drei partiellen Differentialgleichungen beschäftigen, die in der Physik eine grosse Bedeutung haben und gleichzeitig grundlegende Typen ganzer Klassen von Differentialgleichungen repräsentieren. Diese drei Gleichungen sind die folgenden:

Laplacegleichung: $\Delta u = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u = 0 \quad (u\colon \Omega \to \mathbb{R},\ \Omega \subset \mathbb{R}^n)$.

Wärmeleitungsgleichung: $\Delta u = \partial_t u \quad (u\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \Omega \subset \mathbb{R}^n.)$
Hier hängt u nicht nur vom Ort $(x_1, \ldots, x_n)$, sondern auch von der Zeit t ab.

Wellengleichung: $c^2 \Delta u = \partial_t^2 u \quad (u\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \Omega \subset \mathbb{R}^n)$.

Die Laplacegleichung repräsentiert den elliptischen Typ, die Wärmeleitungsgleichung den parabolischen Typ und die Wellengleichung den hyperbolischen Typ einer partiellen Differentialgleichung.

5.1 Dirichletproblem

Schauen wir uns zunächst einmal die Laplacegleichung auf der Einheitskreisscheibe $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ genauer an. Der Rand der Einheitskreisscheibe ist die Einheitskreislinie $\partial\Omega = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Problem: *Das sogenannte Dirichletproblem besteht darin, zu gegebener stetiger Funktion $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ eine Funktion $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit $u \in C^2(\Omega)$ zu finden, die die Laplacegleichung löst und auf dem Rand von Ω die durch f vorgegebenen Werte annimmt. Es müssen also folgende Gleichungen gelten:*

$$\Delta u(x, y) = \partial_x^2 u(x, y) + \partial_y^2 u(x, y) = 0 \quad \text{für alle } (x, y) \in \Omega \text{ und}$$

$$u(x, y) = f(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in S^1.$$

Diese Fragestellung können wir zum Beispiel so interpretieren, dass wir nach einer stationären (d.h. einer zeitunabhängigen) Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf einer leitenden kreisförmigen Kupferplatte suchen. Dann gibt f die Temperaturverteilung auf dem Rand der Platte an, und wir gehen davon aus, dass diese Verteilung zeitlich konstant gehalten wird. Gesucht ist diejenige Temperaturverteilung u, die sich im Inneren der Kupferplatte einstellt, wenn wir den Zeitparameter t gegen unendlich gehen lassen.

Wir werden nun eine Lösung konstruieren, und zwar durch Superposition von Produktlösungen.

1. Schritt: *Transformation auf Polarkoordinaten.*

Der Übergang von Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten ist gegeben durch $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ($r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$). Die vorgegebene Funktion f auf der Kreislinie können wir nun in folgender Form schreiben:

$$f(x,y) = f(\cos\varphi, \sin\varphi) =: F(\varphi)\,.$$

Durch f wird also eine 2π-periodische stetige Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ festgelegt. Wir setzen jetzt

$$U(r,\varphi) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \quad \text{für } r \geq 0,\ \varphi \in \mathbb{R}.$$

Dann ist U eine 2π-periodische Funktion bezüglich φ, und die Gleichungen für u liefern folgende Bedingungen an U (siehe Übungsaufgabe):

$$\Delta u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \partial_r^2 U + \frac{1}{r}\partial_r U + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 U = 0 \quad \text{für alle } r > 0, \varphi \in \mathbb{R} \text{ und}$$

$$U(1,\varphi) = F(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Ausserdem existiert $\lim_{r\to 0} U(r,\varphi)$ für alle φ und ist von φ unabhängig.

2. Schritt: *Produktlösungen bestimmen.*

Nehmen wir an, U ist eine Lösung der Laplacegleichung, die sich als Produkt aus einer Funktion $v\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ des Radius und einer 2π-periodischen Funktion $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Winkels schreiben lässt:

$$U(r,\varphi) = v(r)\cdot w(\varphi) \quad \text{für alle } r, \varphi.$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Laplacegleichung ein, erhalten wir:

$$v''(r)w(\varphi) + \frac{1}{r}v'(r)w(\varphi) + \frac{1}{r^2}w''(\varphi)v(r) = 0\,.$$

Daraus folgt:

$$\frac{r^2 v''(r) + r v'(r)}{v(r)} = -\frac{w''(\varphi)}{w(\varphi)}\,.$$

Die linke Seite dieser Gleichung hängt nicht von φ und die rechte Seite nicht von r ab. Da beide Seiten für alle r, φ miteinander übereinstimmen, hängt der Ausdruck tatsächlich weder von r noch von φ ab. Es gibt also eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$(1) \qquad w''(\varphi) = -\lambda w(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi, \text{ und}$$

$$(2) \qquad v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) - \frac{\lambda}{r^2}v(r) = 0 \quad \text{für alle } r > 0.$$

Die Laplacegleichung für U liefert also zwei durch die Konstante λ gekoppelte Differentialgleichungen für die Funktionen v und w.

Zur Gleichung (1): Zu $\lambda < 0$ lautet die allgemeine Lösung dieser Gleichung $w(\varphi) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}\varphi}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$. Eine Funktion von diesem Typ ist aber nicht 2π-periodisch, es sei denn $c_1 = c_2 = 0$ und $w(\varphi) = 0$ für alle φ.

Zu $\lambda > 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$w(\varphi) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\varphi) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}) .$$

Da w ausserdem 2π-periodisch sein soll, muss gelten $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}$.

Ist $\lambda = 0$, lautet die Lösung $w(\varphi) = c_1 + c_2\varphi$ (mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$), und diese Funktion ist nur dann periodisch, wenn $c_2 = 0$.

Wir erhalten also folgendes Resultat: Die Gleichung (1) hat genau dann eine 2π-periodische Lösung w, die nicht überall verschwindet, wenn $\lambda = k^2$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. In diesem Fall gilt

$$w(\varphi) = c_1 \cos(k\varphi) + c_2 \sin(k\varphi) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}) .$$

Zur Gleichung (2): Für $\lambda = k^2$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ lautet die Gleichung

$$v''(r) + \frac{1}{r} v'(r) - \frac{k^2}{r^2} v(r) = 0 \quad \text{für alle } r > 0.$$

Falls $k = 0$, bilden die Funktionen $v_1(r) = 1$ und $v_2(r) = \ln r$ ein Fundamentalsystem von Lösungen. Allerdings existiert für die Logarithmusfunktion kein Grenzwert für $r \to 0$. Also kommt für unser Problem nur eine konstante Funktion als Lösung in Frage.

Falls $k > 0$, bilden die Funktionen $v_1(r) = r^k$ und $v_2(r) = r^{-k}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen. Wiederum kommt nur ein Vielfaches der Funktion v_1 in unserem Zusammenhang in Frage, weil der Grenzwert $\lim_{r\to 0} v(r)$ existieren muss.

Resultat: *Die Produktlösungen der Laplacegleichung haben folgende Form:*

$$U(r, \varphi) = r^k(\alpha \cos(k\varphi) + \beta \sin(k\varphi)) \quad (r \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}) .$$

Dabei sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$ Konstanten.

3. Schritt: *Superposition der Produktlösungen.*

Für das Dirichletproblem machen wir einen Reihenansatz der Form

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) .$$

Die Randbedingung lautet dann:

$$U(1, \varphi) = F(\varphi) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) .$$

Dies ist gerade die Fourierentwicklung von F. Die Randbedingung wird also erfüllt sein, wenn wir für die Koeffizienten a_n und b_n die reellen Fourierkoeffizienten von F einsetzen.

5.1.1 Beispiele

- Sei $f(x,y) = x \cdot y$ für $(x,y) \in S^1$. Dazu gehört die Funktion $F(\varphi) = f(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos\varphi \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2}\sin(2\varphi)$. Die Fourierentwicklung besteht hier nur aus einem einzigen Summanden, die Koeffizienten sind $a_n = 0$ für alle n, $b_2 = \frac{1}{2}$ und $ba_n = 0$ für alle $n \neq 2$. Also lautet unser Lösungskandidat für das Dirichletproblem

$$U(r,\varphi) = \frac{1}{2} r^2 \sin(2\varphi) = (r\sin\varphi)(r\cos\varphi)\,,$$

oder in kartesischen Koordinaten geschrieben:

$$u(x,y) = x \cdot y \quad \text{für } (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Diese naheliegende Fortsetzung von f aufs Innere der Kreisscheibe erfüllt tatsächlich die Laplacegleichung, wie man sofort sieht.

- Sei $f(x,y) = x^3$ für $(x,y) \in S^1$. Dann ist $F(\varphi) = (\cos\varphi)^3 = \frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos(3\varphi)$ für $\varphi \in \mathbb{R}$. Hier lauten also die Fourierkoeffizienten $b_n = 0$ für alle n, $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{1}{4}$ und $a_n = 0$ für alle $n \neq 1, 3$. Also lautet der Lösungskandidat in Polarkoordinaten:

$$U(r,\varphi) = \frac{3}{4} r\cos\varphi + \frac{1}{4} r^3 \cos(3\varphi)\,.$$

Setzen wir die Beziehung für den Cosinus des dreifachen Winkels ein $\frac{1}{4}\cos(3\varphi) = (\cos\varphi)^3 - \frac{3}{4}\cos\varphi$, erhalten wir:

$$U(r,\varphi) = \frac{3}{4} r\cos\varphi + (r\cos\varphi)^3 - \frac{3}{4} r^2 \cdot r\cos\varphi\,.$$

Nun können wir U in kartesische Koordinaten umschreiben:

$$u(x,y) = \frac{3}{4}x + x^3 - \frac{3}{4}(x^2+y^2)x = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}y^2 x + \frac{3}{4}x\,.$$

Diese Fortsetzung von f ist schon weniger leicht zu raten. Sie ist in der Tat eine Lösung der Laplacegleichung, wie man direkt nachrechnen kann.

Das Ergebnis unserer Überlegungen ist im folgenden Satz zusammengefasst:

5.1.2 Satz *Hat die Funktion F eine auf $[0,2\pi]$ absolut und gleichmässig konvergente Reihenentwicklung der Form*

$$F(\varphi) = f(\cos\varphi, \sin\varphi) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi))\,,$$

so ist

$$U(r,\varphi) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi))$$

für $0 \leq r < 1, \varphi \in \mathbb{R}$ gleichmässig konvergent. Und schreibt man die Funktion U in kartesische Koordinaten um, erhält man eine Lösung u des Dirichletproblems.

Beweis. Die Fourierreihe von F liefert eine konvergente Majorante für die Reihenentwicklung von $U(r, \varphi)$. Daraus folgt die behauptete gleichmässige Konvergenz. Daher darf Differentiation und Reihenbildung miteinander vertauscht werden, und wir erhalten:

$$\Delta U(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta(r^n(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi))) = 0\,,$$

weil alle Summanden nach Konstruktion Produktlösungen des Laplaceoperators sind. Die Randbedingung ist ebenfalls erfüllt. q.e.d.

5.2 Harmonische Funktionen

5.2.1 Definition Die Lösungen $u \in C^2(\Omega)$ der Laplacegleichung $\Delta u = 0$ auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nennt man *harmonische Funktionen* auf Ω.

Mit diesem Begriff können wir das Dirichletproblem für eine Kugel $K = K_R(p)$ von Radius R um einen Punkt p in $\mathbb{R}^n$ folgendermassen formulieren:

Dirichletproblem: *Finde zu einer gegebenen stetigen Funktion $f\colon \partial K \to \mathbb{R}$ auf dem Rand der Kugel eine harmonische Fortsetzung $u\colon K \to \mathbb{R}$ auf das Innere der Kugel K.*

Im vorigen Kapitel haben wir für den Fall $n = 2$ mithilfe der Fourierentwicklung eine Lösung zu beliebigen stetigen Randwerten konstruiert. Nun wollen wir zeigen, dass es keine andere Lösung gibt, oder anders gesagt, dass die Lösung des Dirichletproblems eindeutig bestimmt ist. Das ergibt sich als Folgerung aus dem folgenden *Maximumprinzip* für harmonische Funktionen:

5.2.2 Satz *Sei $K = K_R(p) \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Kugel von Radius R um $p \in \mathbb{R}^n$, und bezeichne Ω das Innere von K. Sei $u\colon K \to \mathbb{R}$ stetig und auf Ω sogar harmonisch. Dann nimmt u sowohl Maximum als auch Minimum auf dem Rand von K an.*

Beweis. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass $p = 0$ ist. Für $\epsilon > 0$ definieren wir eine Funktion $v\colon K \to \mathbb{R}$ durch:

$$v(x) := u(x) + \epsilon(x_1^2 + \ldots + x_n^2) \quad \text{für } x \in K\,.$$

Dann folgt $\Delta v(x) = \Delta u(x) + 2n\epsilon = 2n\epsilon > 0$ für alle $x \in K$.

Weil v stetig ist und K kompakt, nimmt v auf K sein Maximum an, etwa bei $x_0 \in K$. Angenommen, der Punkt $x_0 \notin \partial K$. Dann handelt es sich auch um ein lokales Maximum, und daher ist $\nabla v(x_0) = 0$, und die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ der Hesseschen Matrix $H_v(x_0)$ von v müssen kleiner oder gleich 0 sein. Andererseits ist

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \operatorname{Spur} H_v(x_0) = \partial_1^2 v(x_0) + \partial_2^2 v(x_0) + \ldots + \partial_n^2 v(x_0) = \Delta v(x_0) > 0\,.$$

Dies ist ein Widerspruch, und es gilt doch $x_0 \in \partial K$. Wir erhalten:

$$v(x_0) = u(x_0) + \epsilon||x_0||^2 = u(x_0) + \epsilon R^2 \geq v(x) \geq u(x) \quad \text{für alle } x \in K.$$

Also gilt für alle $\epsilon > 0$:

$$u(x) \leq \epsilon R^2 + \max\{u(x') \mid x' \in \partial K\}.$$

Das ist nur möglich, wenn u tatsächlich sein Maximum schon auf dem Rand von K annimmt. q.e.d.

Das Maximumprinzip hat die folgende wichtige Konsequenz:

5.2.3 FOLGERUNG *Zu jeder Vorgabe von Randwerten auf einer Kugel in $\mathbb{R}^n$ gibt es höchstens eine Lösung des Dirichletproblems.*

Beweis. Nehmen wir an, $u_1, u_2 \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ sind harmonische Funktionen mit denselben Randwerten, das heisst $\Delta u_1 = 0 = \Delta u_2$ und $u_1(x, y) = u_2(x, y) = f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \partial K$. Dann ist auch die Differenzfunktion $u := u_1 - u_2$ harmonisch, und u verschwindet auf dem Rand: $u(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \partial K$. Nach dem Maximumprinzip nimmt u auf dem Rand sowohl Maximum als auch Minimum an, das bedeutet:

$$\min u = 0 = \max u.$$

Also folgt $u = 0$ und damit $u_1 = u_2$, wie behauptet. q.e.d.

Ausserdem können wir folgendes festhalten:

5.2.4 BEMERKUNG *Eine harmonische Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat keine isolierten lokalen Extrema.*

Beweis. Übungsaufgabe. q.e.d.

Zwischen harmonischen Funktionen in zwei Variablen und holomorphen Funktionen besteht ein enger Zusammenhang:

5.2.5 SATZ *Eine Funktion u auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist genau dann harmonisch, wenn u sich als Realteil einer holomorphen Funktion auf Ω (aufgefasst als Teilmenge von $\mathbb{C}$) darstellen lässt.*

Beweis. Ist h eine holomorphe Funktion auf $\Omega \subset \mathbb{C}$ und gilt $h(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ für alle $(x, y) \in \Omega$, wobei $u, v \colon \Omega \to \mathbb{R}$ den Real- bzw. den Imaginärteil von h angeben, dann erfüllen u und v die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $\partial_x u = \partial_y v$ und $\partial_y u = -\partial_x v$, und daraus folgt $\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \partial_x \partial_y v - \partial_y \partial_x v = 0$, da v sogar zweimal stetig differenzierbar sein muss.

Sei jetzt umgekehrt u harmonisch. Zu jedem Punkt $p \in \Omega$ gibt es eine offene Kreisscheibe $K = K_R(p)$ um p, deren Abschluss ganz in Ω enthalten ist. Weil $\Delta u = 0$ ist, können wir u als die Lösung des Dirichletproblems auf K für die durch

u auf ∂K vorgegebenen Randwerte auffassen. Da die Lösung des Dirichletproblems eindeutig bestimmt ist, stimmt sie mit derjenigen Lösung überein, die man aus der Fourierentwicklung der Randwerte gewinnen kann. Weil u sogar zweimal stetig differenzierbar ist, ist die entsprechende Fourierreihe auf dem Rand von K absolut und gleichmässig konvergent, und die Funktion u hat in Polarkoordinaten die folgende Beschreibung:

$$\begin{aligned} U(r,\varphi) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left(c_n e^{in\varphi} + \overline{c_n} e^{-in\varphi}\right) \end{aligned}$$

für $0 \leq r < R, \varphi \in \mathbb{R}$, wobei $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$. Wir haben dies eigentlich nur für den Fall $R = 1$ gezeigt. Eine Funktion auf K lässt sich aber leicht auf eine entsprechende Funktion auf der Einheitskreisscheibe zurückführen, und man erhält dann die angegebene Formel.

Wir können $z = re^{i\varphi}$ als komplexe Zahl auffassen, und definieren eine komplexe Funktion $h\colon \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} \to \mathbb{C}$ durch

$$h(z) := c_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{R^n} z^n = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{R^n} z^n .$$

Dabei sind die c_n die komplexen Fourierkoeffizienten der Funktion $U(R,\varphi)$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{R^n} z^n$ hat Konvergenzradius $\geq R$, denn sie konvergiert nach Voraussetzung für $|z| = R$. Also ist die Funktion h holomorph, und die Lösung des Dirichletproblems lässt sich als Realteil der holomorphen Funktion h darstellen. q.e.d.

5.2.6 Beispiele Sei $n = 2$ und $R = 1$.

- Wir haben bereits gezeigt, dass die Fourierentwicklung der Randfunktion $f(x,y) = x^3$ für $(x,y) \in S^1$ auf die folgende harmonische Fortsetzung führt:

  $$u(x,y) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}y^2x + \frac{3}{4}x \quad \text{für } x^2 + y^2 \leq 1.$$

  Um diese Fortsetzung zu finden, hatten wir f in Polarkoordinaten geschrieben:

  $$F(\varphi) = f(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos^3\varphi = \frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos(3\varphi) .$$

  Daraus lesen wir ab:

  $$h(z) = \frac{3}{4}z + \frac{1}{4}z^3 .$$

  Der Realteil dieser holomorphen Funktion stimmt tatsächlich mit der Funktion u überein, wie man sofort nachrechnet.

- Sei jetzt $F(\varphi) = \varphi$ für $0 \le \varphi < \pi$ und $F(\varphi) = 2\pi - \varphi$ für $\pi \le \varphi \le 2\pi$. Die Fourierentwicklung von F lautet:

$$F(\varphi) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos\varphi + \frac{\cos(3\varphi)}{3^2} + \ldots)\,.$$

Die komplexen Fourierkoeffizienten sind hier also:

$$c_0 = \frac{\pi}{2}, \quad 2c_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2\pi} = a_{2k-1} \quad \text{und} \quad c_{2k} = 0 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}\,.$$

Die entsprechende holomorphe Funktion lautet also

$$h(z) = \pi - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k-1}}{(2k-1)^2}\,,$$

und der Realteil $u(x,y) = \mathrm{Re}(h(x+iy))$ von h ist die harmonische Fortsetzung von F aufs Innere der Kreisscheibe.

Man kann die Lösungen der Laplacegleichung auch durch eine Integraleigenschaft charakterisieren. Diese Eigenschaft besagt, dass der Wert der Funktion an einer beliebigen Stelle p jeweils mit dem Integralmittel der Funktion über jede beliebige Kugel um p übereinstimmt. Um dies präziser zu formulieren, bezeichnen wir mit ω_n die Oberfläche der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$, das heisst

$$\omega_n := \int_{\partial K_R(0)} d\sigma(x)\,.$$

Zum Beispiel ist $\omega_2 = 2\pi$ und $\omega_3 = 4\pi$.

5.2.7 Definition Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet und $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Man sagt, dass u die *Mittelwerteigenschaft* hat, wenn folgendes gilt:

$$u(p) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial K_R(p)} u(x)d\sigma(x)$$

für jede abgeschlossene Kugel $K_R(p)$, die ganz in Ω enthalten ist. Für $n = 2$ bedeutet das konkreter:

$$u(p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(p + Re^{i\varphi})d\varphi$$

für jede abgeschlossene Kreisscheibe $K_R(p) \subset \Omega$.

5.2.8 Bemerkung *Hat u die Mittelwerteigenschaft, dann gilt auch*

$$u(p) = \frac{n}{\omega_n R^n}\int_{K_R(p)} u(x)dx_1dx_2\ldots dx_n$$

für jede abgeschlossene Kugel $K_R(p) \subset \Omega$. Insbesondere gilt für das Kugelvolumen

$$\int_{K_R(p)} 1\, dx_1dx_2\ldots dx_n = \frac{\omega_n R^n}{n}\,.$$

Beweis. Denken wir uns die Kugel wie eine Zwiebel in Schalen zerlegt und interpretieren wir die Integration über die Vollkugel als eine Integration über immer kleiner werdende Kugeloberflächen. Dies Prinzip liefert:

$$\int_{K_R(p)} u(x)dx_1dx_2\ldots dx_n = \int_0^R \left(\int_{\partial K_r(p)} u(x)d\sigma(x)\right) dr =$$

$$\int_0^R \omega_n r^{n-1}u(p)dr = \omega_n \frac{R^n}{n}u(p)\,.$$

Und daraus folgt die Behauptung. Setzt man für u diejenige Funktion ein, die konstant gleich 1 ist, erhält man die Aussage über das Volumen der Kugel. q.e.d.

5.2.9 Satz *Sei u eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf einem offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Die Funktion u ist harmonisch genau dann, wenn sie die Mittelwerteigenschaft hat.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage nur für den Fall $n = 2$. Nehmen wir zuerst an, u sei harmonisch. Dann können wir u als Realteil einer geeigneten holomorphen Funktion h schreiben und die Cauchyformel für h verwenden. Ist $K_R(p)$ eine abgeschlossene Kreisscheibe in Ω, und fassen wir den Punkt p als komplexe Zahl z_0 auf, so liefert die Cauchyformel:

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_R(z_0)} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta\,.$$

Wählen wir nun wie üblich für den Kreisrand die Parametrisierung $\zeta = \gamma(\varphi) = z_0 + Re^{i\varphi}$ ($\varphi \in [0, 2\pi]$), so erhalten wir:

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{h(\gamma(\varphi))}{Re^{i\varphi}}\dot\gamma(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(z_0 + Re^{i\varphi})\,d\varphi\,.$$

Für den Realteil u von h folgt daraus, wenn wir $z_0+Re^{i\varphi}$ als Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ auffassen:

$$u(p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x)d\varphi = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} u(x)Rd\varphi\,.$$

Wegen $d\sigma(x) = Rd\varphi$, ergibt sich daraus wie behauptet:

$$u(p) = \frac{1}{2\pi R}\int_{\partial K_R(p)} u(x)d\sigma(x)\,.$$

Nehmen wir jetzt umgekehrt an, dass u die Mittelwerteigenschaft erfüllt. Dann gilt nach Bemerkung 5.2.8:

$$\int_{v\in K_R(0)} u(p+v)\,d^2v = \pi R^2 u(p)\,.$$

Betrachten wir jetzt die Taylorentwicklung von u um p (bis zum Grad 2):

$$u(p+v) = u(p) + \langle (\nabla u)(p), v \rangle + \frac{1}{2} v^T H_u(p) v + R(v)||v||^2 ,$$

wobei $\lim_{v \to 0} R(v) = 0$. Offenbar ist

$$\int_{v \in K_R(0)} u(p)\, d^2v = \pi R^2 u(p) \quad \text{und} \quad \int_{v \in K_R(0)} \langle (\nabla u)(p), v \rangle\, d^2v = 0 ,$$

weil der lineare Term harmonisch ist und deshalb wie bereits gesehen, die Mittelwerteigenschaft hat. Für die durch die Hessematrix gegebene quadratische Form $q_{H_u(p)}(v) = v^T H_u(p) v$ gilt (siehe Übungsaufgabe)

$$\frac{1}{2} \int_{v \in K_R(0)} q_{H_u(p)}(v)\, d^2v = \frac{\pi R^4}{8} \operatorname{Spur}(H_u(p)) = \frac{\pi R^4}{8} \Delta u(p) .$$

Also folgt aus der Mittelwerteigenschaft zu vorgegenem $\epsilon > 0$ für genügend kleine Radien R, so dass $|R(v)| < \epsilon$:

$$\left| -\frac{\pi R^4}{8} \Delta u(p) \right| = \left| \int_{v \in K_R(0)} R(v)||v||^2\, d^2v \right| \leq \epsilon \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 r\, d\varphi\, dr = \epsilon 2\pi \frac{R^4}{4} .$$

Weil demnach für alle $\epsilon > 0$ gilt

$$|\Delta u(p)| \leq 4\epsilon ,$$

muss tatsächlich $(\Delta u)(p) = 0$ sein. Also ist u harmonisch. q.e.d.