12.03.20 **Übung 3 (für Pharma/Geo/Bio/Stat)** Uni Basel

Besprechung der Lösungen: 17./18. März 2020 in den Übungsstunden

Aufgabe 1
Zwei faire Würfel mit den Zahlen 1 bis 6 werden geworfen. Seien x und y die Augenzahlen beim ersten bzw. zweiten Würfel. Wir definieren die folgenden Ereignisse:

$$A = (x = y), \quad B = (x + y > 9), \quad C = (x + y = 7)$$

(a) Welche Paare von Ereignissen sind unvereinbar (d.h. können nicht gleichzeitig eintreten)?

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten von A, B, C und von $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$ und $A \cup C$.

Aufgabe 2
In einer Warenlieferung befinden sich 50 Stück, davon sind 5 fehlerhaft. Man entnimmt (als Stichprobe) zwei Stück ohne Zurücklegen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,

(i) kein fehlerhaftes Stück (ii) genau ein fehlerhaftes Stück

zu ziehen?

Aufgabe 3
Von allen einkommenden Mails sind 25 % Spam. Der Spam-Filter gibt ein Spam-Mail mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % in die Spam-Box, ein gutes Mail mit 99 % Wahrscheinlichkeit in die Mail-Box.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Mail in der Spam-Box ein gutes Mail?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Mail in der Mail-Box trotzdem Spam?

Aufgabe 4
(a) Sie spielen immer wieder das folgende Glücksspiel. Für einen Einsatz von 1 CHF dürfen Sie zweimal würfeln. Bei der Augensumme 12 gewinnen Sie 20 CHF und bei der Augensumme 11 erhalten Sie 5 CHF. In allen anderen Fällen ist der Einsatz verloren. Machen Sie langfristig einen Gewinn?

(b) Ein Würfel ist gefälscht, und zwar kommt die Augenzahl 1 viermal vor, dafür fehlen die Augenzahlen 2, 3 und 4. Diesen gefälschten Würfel werfen wir nun zweimal. Die Zufallsgrösse X sei die Summe der beiden Augenzahlen. Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mu = E(X)$ sowie die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{Var(X)}$ von X.

Aufgabe 5
Der FC Geo spielt gegen den FC Pharma ein Fussballspiel, in welchem aus dem Spiel heraus keine Tore fallen. Es wird jedoch für jede Mannschaft einen Penalty gepfiffen. Der Spieler, der für den FC Geo den Penalty ausführt, trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von

90 % (unhaltbar für den Torwart) ins Tor. Für den Penaltyschützen des FC Pharma sei diese Wahrscheinlichkeit p. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Fussballspiel unentschieden ausgeht, beträgt 70 %.

(a) Wie gross ist p?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der FC Geo?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der FC Pharma?

Zusatzaufgaben

Aufgabe 6
Die Dozentin von Mathematik II für Naturwissenschaften schreibt ein wichtiges Beispiel an die Tafel. Dabei hört sie eine Person im Hörsaal schwatzen. Sie weiss, dass die Pharma-Studierenden 2 % der Zeit schwatzen, alle anderen Studierenden jedoch 10 % der Zeit. Im Hörsaal sind zur Hälfte Pharma-Studierende. Mit welcher Wahrscheinlichkeit studiert die schwatzende Person Pharmazie?

Aufgabe 7
Eine Mädchengeburt und eine Knabengeburt seien gleichwahrscheinlich.

(a) Eine Familie hat zwei Kinder. Das jüngste heisst Lilly. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beide Kinder Mädchen?

(b) Eine Familie hat zwei Kinder. Eines davon heisst Lilly. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beide Kinder Mädchen?

Aufgabe 8
Mit A bezeichnen wir das Ereignis, dass eine Familie Kinder von beiderlei Geschlecht hat, mit B bezeichnen wir das Ereignis, dass dieselbe Familie höchstens ein Mädchen hat.

(a) Die Familie habe 2 Kinder. Sind A und B (stochastisch) unabhängig?

(b) Die Familie habe 3 Kinder. Sind A und B (stochastisch) unabhängig?

Aufgabe 9
Ziege oder Mercedes? In einer Quizsendung wird das folgende Spiel gespielt. Ein Kandidat steht vor drei geschlossenen Türen. Es ist bekannt, dass sich hinter einer ein Mercedes, hinter den anderen beiden aber jeweils eine Ziege befindet. Der Kandidat wählt eine Tür, die aber geschlossen bleibt. Daraufhin öffnet der Quizmaster eine der verbleibenden Türen, hinter denen sich eine Ziege befindet. Nun hat der Kandidat die Möglichkeit, bei seiner gewählten Tür zu bleiben, oder die andere noch verschlossene Tür zu wählen. Was ist die beste Strategie, um den Mercedes zu bekommen?

(a) Der Kandidat entscheidet nach Zufall, welche der beiden noch verschlossenen Türen er wählt.

(b) Der Kandidat bleibt bei der Tür, die er zu Beginn gewählt hat.

(c) Der Kandidat wechselt zur anderen verschlossenen Tür.

Lösungshinweise

Aufgabe 1
Analog zum 2. Beispiel auf den Seiten 30–31 des Skripts.

Aufgabe 2
Analog zum Beispiel auf Seite 35 des Skripts (wem der Rechenweg klar ist, kann auf die Benennung von zwei Ereignissen A und B verzichten).

Aufgabe 3
Mit einem Wahrscheinlichkeitsbaum, wie in den Beispielen 1 und 2 auf den Seiten 35–36. Um welche Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten geht es? Der erste Satz der Aufgabe sagt, dass $P(A) = 0,25$ für das Ereignis $A =$ (Mail ist Spam). Der zweite Satz der Aufgabe sagt, dass $P(B|A) = 0,8$ für das Ereignis $B =$ (Mail landet in der Spam-Box) und dass $P(\overline{B}|\overline{A}) = 0,99$. Gesucht sind nun (a) $P(\overline{A}|B)$ und (b) $P(A|\overline{B})$.

Aufgabe 4
Analog zu den Beispielen auf Seite 40 (oder zum 5. Beispiel auf Seite 42). Die Standardabweichung σ in (b) am besten mit Satz 4.1 berechnen.

Aufgabe 5
Die Ereignisse sind $A =$ (Penaltyschütze des FC Geo trifft) und $B =$(Penaltyschütze des FC Pharma trifft) mit $P(A) = 0,9$ und $P(B) = p$. Die Ereignisse A und B sind (stochastisch) unabhängig. In (a) kann p mit Hilfe der Gleichung $0,7 = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$ berechnet werden. In (b) ist $P(A \cap \overline{B})$ gesucht und in (c) $P(\overline{A} \cap B)$. Es werden also genau die vier Wahrscheinlichkeiten auf der rechten Seite eines Wahrscheinlichkeitsbaumes benötigt (vgl. auch das 3. Beispiel auf Seite 37). Es sind die Wahrscheinlichkeiten der Fussballresultate 1:1, 0:0, 1:0, 0:1.

Aufgabe 6 (Zusatzaufgabe)
Mit einem Wahrscheinlichkeitsbaum, analog zu den Beispielen 1 und 2 auf den Seiten 35–36.

Aufgabe 7 (Zusatzaufgabe)
Nicht zu viel denken.

Aufgabe 8 (Zusatzaufgabe)
Die Gleichung in der Definition auf Seite 37 überprüfen.

Aufgabe 9 (Zusatzaufgabe)
Wir berechnen die Wahrscheinlichkeiten, den Mercedes zu bekommen, in (a), (b) und (c). (a) und (b) sollten klar sein. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten in (b) und (c) ergibt 1.

Ergebnisse

Aufgabe 1

(a) A und C, B und C

(b) $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{18}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{18}$, $P(A \cap C) = 0$, $P(A \cup C) = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 2

(i) $\frac{45}{50} \cdot \frac{44}{49} \approx 0,808$ (ii) $\frac{45}{50} \cdot \frac{5}{49} + \frac{5}{50} \cdot \frac{45}{49} \approx 0,184$

Aufgabe 3

(a) $P(\text{gutes Mail} \mid \text{Mail in Spam-Box}) = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}01}{0{,}25 \cdot 0{,}8 + 0{,}75 \cdot 0{,}01} \approx 0,036 = 3,6\,\%$

(b) $P(\text{Spam-Mail} \mid \text{Mail in Mail-Box}) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}2}{0{,}25 \cdot 0{,}2 + 0{,}75 \cdot 0{,}99} \approx 0,063 = 6,3\,\%$

Aufgabe 4

(a) Nein. Der Erwartungswert ist $-\frac{1}{6} \approx -0,17$. Sie verlieren also in jedem Spiel durchschnittlich 17 Rappen.

(b) $\mu = E(X) = 5$, $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{9,1\overline{6}} \approx 3,028$, wobei

X	2	6	7	10	11	12
P	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Aufgabe 5

(a) $0,7 = 0,9 \cdot p + 0,1 \cdot (1-p) \quad \Longrightarrow \quad p = 0,75 = 75\,\%$

(b) $0,9 \cdot (1-p) = 0,9 \cdot 0,25 = 0,225 = 22,5\,\%$

(c) $0,1 \cdot p = 0,1 \cdot 0,75 = 0,075 = 7,5\,\%$ (oder: $1 - 0,7 - 0,225 = 0,075$)

Aufgabe 6 (Zusatzaufgabe)

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 16,7 % studiert die schwatzende Person Pharmazie.

Rechnung: Man kann den Wahrscheinlichkeitsbaum von Seite 35 nutzen (es geht auch direkt) für die Ereignisse A = (Person studiert Pharmazie) und B = (Person schwatzt).

Nach Voraussetzung ist $P(A) = 0,5$, $P(B|A) = 0,02$ und $P(B|\overline{A}) = 0,1$.

Gesucht ist

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\ .$$

Mit $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = 0,5 \cdot 0,02 = 0,01$
und $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0,01 + 0,5 \cdot 0,1 = 0,06$
folgt $P(A|B) = 0,1\overline{6} \approx 16,7\,\%$.

Aufgabe 7 (Zusatzaufgabe)

Es sei M = Mädchen und K = Knabe.

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (mögliche Fälle sind MM, MK, KM, einer davon (MM) ist günstig)

Aufgabe 8 (Zusatzaufgabe)
Bezeichnungen wie in Aufgabe 7.

(a) Nein.
$\Omega = \{MM, MK, KM, KK\}$, $A = \{MK, KM\}$, $B = \{MK, KM, KK\}$,
$A \cap B = \{MK, KM\}$.
Es folgt $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$, also ist $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$.

(b) Ja.
Die Rechnung geht wie in (a). Man findet $P(A \cap B) = \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$.

Aufgabe 9 (Zusatzaufgabe)
Die beste Strategie ist zu wechseln, denn die Gewinnwahrscheinlichkeiten sind:

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$