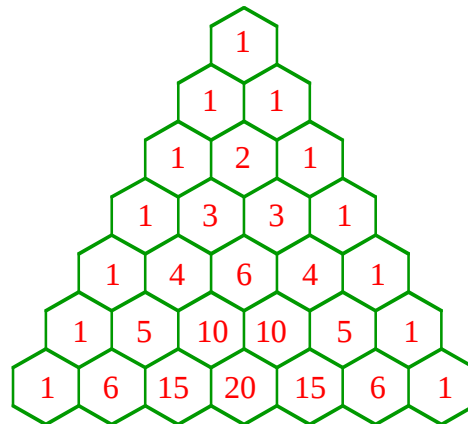


Hans Walser

Mathematik 2 für Naturwissenschaften



Tabellen

(leicht gekürzte Version)



Inhalt

1	Binomische Verteilung	1
1.1	Binomische Verteilung (ohne Summation)	2
1.2	Summierte binomische Verteilung	5
1.3	Summierte binomische Verteilung, $p = q = 0.5$	8
2	Normalverteilung	10
3	Studentsche t -Verteilung	12
3.1	Mittelwert einer Stichprobe. Vertrauensintervall	12
3.2	Vergleich der Mittelwerte zweier Normalverteilungen	12
3.2.1	Unabhängige Stichproben	12
3.2.2	Gepaarte Stichproben	12
4	Schranken der F -Verteilung für das Signifikanzniveau 5%	14
5	Korrelationsanalyse	20
5.1	Kritische Werte für den Korrelationskoeffizienten nach Pearson	20
5.2	Kritische Werte für den Korrelationskoeffizienten nach Spearman	21
6	Chi-Quadrat-Tabelle	22

Tabellen für die Lehrveranstaltung *Mathematik 2 für Naturwissenschaften*

Sommer 2006 Probeausgabe

Sommer 2007 Korrekturen. MathType. Ergänzungen

Frühjahr 2008 Grafische Überarbeitung. Kleine Ergänzungen

Frühjahr 2009 Fehlerkorrekturen

Frühjahr 2011 Fehlerkorrekturen. Kürzung

Frühjahr 2014 Kleine Überarbeitung

Hans Walser

Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel

www.walser-h-m.ch/hans

30. März 2015: Leicht gekürzt und Formeln ersetzt

22. Februar 2018: Kleine Überarbeitung der Erklärungen zu den Tabellen

Christine Zehrt

1 Binomische Verteilung

Binomische Verteilung (ohne Summation)

Es ist p die Erfolgswahrscheinlichkeit im Einzelversuch.

Ferner ist $q = 1 - p$ die Misserfolgswahrscheinlichkeit im Einzelversuch.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P_n(k)$, auf n Versuche genau k Erfolge zu haben

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Summierte binomische Verteilung

Es ist p die Erfolgswahrscheinlichkeit im Einzelversuch.

Ferner ist $q = 1 - p$ die Misserfolgswahrscheinlichkeit im Einzelversuch.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, auf n Versuche höchstens x Erfolge zu haben

$$P_n(k \leq x) = P_n(0) + P_n(1) + \cdots + P_n(x) = \sum_{k=0}^x P_n(k)$$

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad n = 8, 9, 10$$
[illegible]

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad n = 15, 20$$

	p	0.001	0.01	0.05	0.1	1/6	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
n	k										
15	0	0.985	0.860	0.463	0.206	0.065	0.035	0.013	0.005	0.000	0.000
15	1	0.015	0.130	0.366	0.343	0.195	0.132	0.067	0.031	0.005	0.000
15	2	0.000	0.009	0.135	0.267	0.273	0.231	0.156	0.092	0.022	0.003
15	3	0.000	0.000	0.031	0.129	0.236	0.250	0.225	0.170	0.063	0.014
15	4	0.000	0.000	0.005	0.043	0.142	0.188	0.225	0.219	0.127	0.042
15	5	0.000	0.000	0.001	0.010	0.062	0.103	0.165	0.206	0.186	0.092
15	6	0.000	0.000	0.000	0.002	0.021	0.043	0.092	0.147	0.207	0.153
15	7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.005	0.014	0.039	0.081	0.177	0.196
15	8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.013	0.035	0.118	0.196
15	9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.012	0.061	0.153
15	10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.024	0.092
15	11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.007	0.042
15	12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.014
15	13	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003
15	14	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
15	15	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20	0	0.980	0.818	0.358	0.122	0.026	0.012	0.003	0.001	0.000	0.000
20	1	0.020	0.165	0.377	0.270	0.104	0.058	0.021	0.007	0.000	0.000
20	2	0.000	0.016	0.189	0.285	0.198	0.137	0.067	0.028	0.003	0.000
20	3	0.000	0.001	0.060	0.190	0.238	0.205	0.134	0.072	0.012	0.001
20	4	0.000	0.000	0.013	0.090	0.202	0.218	0.190	0.130	0.035	0.005
20	5	0.000	0.000	0.002	0.032	0.129	0.175	0.202	0.179	0.075	0.015
20	6	0.000	0.000	0.000	0.009	0.065	0.109	0.169	0.192	0.124	0.037
20	7	0.000	0.000	0.000	0.002	0.026	0.055	0.112	0.164	0.166	0.074
20	8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.022	0.061	0.114	0.180	0.120
20	9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.007	0.027	0.065	0.160	0.160
20	10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.010	0.031	0.117	0.176
20	11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.012	0.071	0.160
20	12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.035	0.120
20	13	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.015	0.074
20	14	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.005	0.037
20	15	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.015
20	16	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.005
20	17	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001
20	18	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20	19	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20	20	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

$$P_n(k \leq x) = \sum_{k=0}^x P_n(k) \quad n = 8, 9, 10$$
[illegible]

1.3 Summierte binomische Verteilung, p = q = 0.5

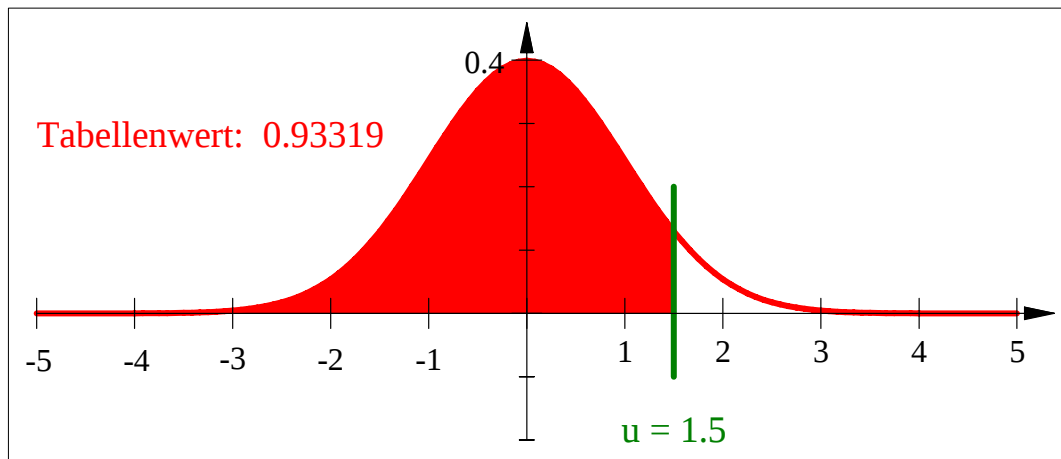
$$P_n(k \leq x) = \sum_{k=0}^x P_n(k) \quad n = 1, 2, \dots, 20$$

<i>n</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>x</i>										
0	0.500	0.250	0.125	0.063	0.031	0.016	0.008	0.004	0.002	0.001
1	1.000	0.750	0.500	0.313	0.188	0.109	0.063	0.035	0.020	0.011
2		1.000	0.875	0.688	0.500	0.344	0.227	0.145	0.090	0.055
3			1.000	0.938	0.813	0.656	0.500	0.363	0.254	0.172
4				1.000	0.969	0.891	0.773	0.637	0.500	0.377
5					1.000	0.984	0.938	0.855	0.746	0.623
6						1.000	0.992	0.965	0.910	0.828
7							1.000	0.996	0.980	0.945
8								1.000	0.998	0.989
9									1.000	0.999
10										1.000

<i>n</i>	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
<i>x</i>										
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.006	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.033	0.019	0.011	0.006	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000
3	0.113	0.073	0.046	0.029	0.018	0.011	0.006	0.004	0.002	0.001
4	0.274	0.194	0.133	0.090	0.059	0.038	0.025	0.015	0.010	0.006
5	0.500	0.387	0.291	0.212	0.151	0.105	0.072	0.048	0.032	0.021
6	0.726	0.613	0.500	0.395	0.304	0.227	0.166	0.119	0.084	0.058
7	0.887	0.806	0.709	0.605	0.500	0.402	0.315	0.240	0.180	0.132
8	0.967	0.927	0.867	0.788	0.696	0.598	0.500	0.407	0.324	0.252
9	0.994	0.981	0.954	0.910	0.849	0.773	0.685	0.593	0.500	0.412
10	1.000	0.997	0.989	0.971	0.941	0.895	0.834	0.760	0.676	0.588
11	1.000	1.000	0.998	0.994	0.982	0.962	0.928	0.881	0.820	0.748
12		1.000	1.000	0.999	0.996	0.989	0.975	0.952	0.916	0.868
13			1.000	1.000	1.000	0.998	0.994	0.985	0.968	0.942
14				1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.990	0.979
15					1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.994
16						1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
17							1.000	1.000	1.000	1.000

2 Normalverteilung

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$



Was die Tabelle liefert

Beispiel:

$$\Phi(1.5) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1.5} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 0.93319$$

Problemstellung:

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_a}^{u_b} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

(1) Umrechnen der Grenzen:

$$u_b = \frac{b - \mu}{\sigma}, \quad u_a = \frac{a - \mu}{\sigma}$$

(2) Die Tabelle liefert:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

(3) Berechnung des Integrals

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_a}^{u_b} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \Phi(u_b) - \Phi(u_a)$$

Die **zweite Stelle** nach dem Dezimalpunkt für den Input u wird der **obersten Zeile** entnommen.

Beispiel: $\Phi(1.26) = 0.89617$

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Negatives u : $\Phi(-0.7) = 1 - \Phi(0.7) = 1 - 0.75804 = 0.24196$

3 Studentsche t-Verteilung

3.1 Mittelwert einer Stichprobe. Vertrauensintervall

Testgröße für μ_0 als Mittelwert: $t = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{SE_x}$

Vertrauensintervall zum Niveau $1 - \alpha$:

$$[\bar{x} - t_{\alpha, \nu} \cdot SE_x, \bar{x} + t_{\alpha, \nu} \cdot SE_x]$$

Dabei bedeutet $t_{\alpha, \nu}$ die kritische Schranke für das Signifikanzniveau α und den Freiheitsgrad $\nu = n - 1$, wobei der Stichprobenumfang n klein ist.

Schreibweise: $\bar{x} \pm t_{\alpha, \nu} \cdot SE_x$

Beispiel: $t_{5\%, 8} = 2.306$ (zweiseitig)

3.2 Vergleich der Mittelwerte zweier Normalverteilungen

3.2.1 Unabhängige Stichproben

Nullhypothese: $\mu_x = \mu_y$

α wählen. Entscheiden, ob zweiseitig oder einseitig testen.

Testgröße: $t = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{SE_{\bar{x} - \bar{y}}} = |\bar{x} - \bar{y}| \sqrt{\frac{n_x n_y}{n_x + n_y}} \sqrt{\frac{n_x + n_y - 2}{s_x^2(n_x - 1) + s_y^2(n_y - 1)}}$

Freiheitsgrad: $\nu = n_x + n_y - 2$

Aus Tabelle t_{krit} ablesen.

Falls $t > t_{\text{krit}} \Rightarrow$ Nullhypothese verwerfen

3.2.2 Gepaarte Stichproben

Nullhypothese: $\mu_x = \mu_y$

α wählen. Entscheiden, ob zweiseitig oder einseitig testen.

Testgröße: $t = \frac{\bar{d}}{SE_{\bar{d}}}$, dabei ist $d_i = x_i - y_i$

Freiheitsgrad: $\nu = n - 1$

Aus Tabelle t_{krit} ablesen.

Falls $t > t_{\text{krit}} \Rightarrow$ Nullhypothese verwerfen

4 Schranken der F-Verteilung für das Signifikanzniveau 5%

Varianzenquotiententest

Nullhypothese: $\sigma_x = \sigma_y$

Signifikanzniveau α wählen.

Testgröße: $F = \frac{s_x^2}{s_y^2}$, Zähler größer als Nenner

Freiheitsgrade: $\nu_x = n_x - 1$, $\nu_y = n_y - 1$

Aus Tabelle F_{krit} ablesen.

Falls $F > F_{\text{krit}} \Rightarrow$ Nullhypothese verwerfen

Schranken der F-Verteilung für das Signifikanzniveau 5%

	Freiheitsgrade für den Zähler (größere Varianz)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
35	4.12	3.27	2.87	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16	2.11
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93
150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89
300	3.87	3.03	2.63	2.40	2.24	2.13	2.04	1.97	1.91	1.86
1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84

Schranken der F-Verteilung für das Signifikanzniveau 5%

	Freiheitsgrade für den Zähler (größere Varianz)									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	243	244	245	245	246	246	247	247	248	248
2	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4
3	8.76	8.74	8.73	8.71	8.70	8.69	8.68	8.67	8.67	8.66
4	5.94	5.91	5.89	5.87	5.86	5.84	5.83	5.82	5.81	5.80
5	4.70	4.68	4.66	4.64	4.62	4.60	4.59	4.58	4.57	4.56
6	4.03	4.00	3.98	3.96	3.94	3.92	3.91	3.90	3.88	3.87
7	3.60	3.57	3.55	3.53	3.51	3.49	3.48	3.47	3.46	3.44
8	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.20	3.19	3.17	3.16	3.15
9	3.10	3.07	3.05	3.03	3.01	2.99	2.97	2.96	2.95	2.94
10	2.94	2.91	2.89	2.86	2.85	2.83	2.81	2.80	2.79	2.77
11	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72	2.70	2.69	2.67	2.66	2.65
12	2.72	2.69	2.66	2.64	2.62	2.60	2.58	2.57	2.56	2.54
13	2.63	2.60	2.58	2.55	2.53	2.51	2.50	2.48	2.47	2.46
14	2.57	2.53	2.51	2.48	2.46	2.44	2.43	2.41	2.40	2.39
15	2.51	2.48	2.45	2.42	2.40	2.38	2.37	2.35	2.34	2.33
16	2.46	2.42	2.40	2.37	2.35	2.33	2.32	2.30	2.29	2.28
17	2.41	2.38	2.35	2.33	2.31	2.29	2.27	2.26	2.24	2.23
18	2.37	2.34	2.31	2.29	2.27	2.25	2.23	2.22	2.20	2.19
19	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.21	2.20	2.18	2.17	2.16
20	2.31	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18	2.17	2.15	2.14	2.12
21	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18	2.16	2.14	2.12	2.11	2.10
22	2.26	2.23	2.20	2.17	2.15	2.13	2.11	2.10	2.08	2.07
23	2.24	2.20	2.18	2.15	2.13	2.11	2.09	2.08	2.06	2.05
24	2.22	2.18	2.15	2.13	2.11	2.09	2.07	2.05	2.04	2.03
25	2.20	2.16	2.14	2.11	2.09	2.07	2.05	2.04	2.02	2.01
26	2.18	2.15	2.12	2.09	2.07	2.05	2.03	2.02	2.00	1.99
27	2.17	2.13	2.10	2.08	2.06	2.04	2.02	2.00	1.99	1.97
28	2.15	2.12	2.09	2.06	2.04	2.02	2.00	1.99	1.97	1.96
29	2.14	2.10	2.08	2.05	2.03	2.01	1.99	1.97	1.96	1.94
30	2.13	2.09	2.06	2.04	2.01	1.99	1.98	1.96	1.95	1.93
35	2.07	2.04	2.01	1.99	1.96	1.94	1.92	1.91	1.89	1.88
40	2.04	2.00	1.97	1.95	1.92	1.90	1.89	1.87	1.85	1.84
50	1.99	1.95	1.92	1.89	1.87	1.85	1.83	1.81	1.80	1.78
60	1.95	1.92	1.89	1.86	1.84	1.82	1.80	1.78	1.76	1.75
70	1.93	1.89	1.86	1.84	1.81	1.79	1.77	1.75	1.74	1.72
80	1.91	1.88	1.84	1.82	1.79	1.77	1.75	1.73	1.72	1.70
100	1.89	1.85	1.82	1.79	1.77	1.75	1.73	1.71	1.69	1.68
150	1.85	1.82	1.79	1.76	1.73	1.71	1.69	1.67	1.66	1.64
300	1.82	1.78	1.75	1.72	1.70	1.68	1.66	1.64	1.62	1.61
1000	1.80	1.76	1.73	1.70	1.68	1.65	1.63	1.61	1.60	1.58

Freiheitsgrade für den Nenner (kleinere Varianz)

Schranken der F-Verteilung für das Signifikanzniveau 5%

	Freiheitsgrade für den Zähler (größere Varianz)									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	248	249	249	249	249	249	250	250	250	250
2	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	8.65	8.65	8.64	8.64	8.63	8.63	8.63	8.62	8.62	8.62
4	5.79	5.79	5.78	5.77	5.77	5.76	5.76	5.75	5.75	5.75
5	4.55	4.54	4.53	4.53	4.52	4.52	4.51	4.50	4.50	4.50
6	3.86	3.86	3.85	3.84	3.83	3.83	3.82	3.82	3.81	3.81
7	3.43	3.43	3.42	3.41	3.40	3.40	3.39	3.39	3.38	3.38
8	3.14	3.13	3.12	3.12	3.11	3.10	3.10	3.09	3.08	3.08
9	2.93	2.92	2.91	2.90	2.89	2.89	2.88	2.87	2.87	2.86
10	2.76	2.75	2.75	2.74	2.73	2.72	2.72	2.71	2.70	2.70
11	2.64	2.63	2.62	2.61	2.60	2.59	2.59	2.58	2.58	2.57
12	2.53	2.52	2.51	2.51	2.50	2.49	2.48	2.48	2.47	2.47
13	2.45	2.44	2.43	2.42	2.41	2.41	2.40	2.39	2.39	2.38
14	2.38	2.37	2.36	2.35	2.34	2.33	2.33	2.32	2.31	2.31
15	2.32	2.31	2.30	2.29	2.28	2.27	2.27	2.26	2.25	2.25
16	2.26	2.25	2.24	2.24	2.23	2.22	2.21	2.21	2.20	2.19
17	2.22	2.21	2.20	2.19	2.18	2.17	2.17	2.16	2.15	2.15
18	2.18	2.17	2.16	2.15	2.14	2.13	2.13	2.12	2.11	2.11
19	2.14	2.13	2.12	2.11	2.11	2.10	2.09	2.08	2.08	2.07
20	2.11	2.10	2.09	2.08	2.07	2.07	2.06	2.05	2.05	2.04
21	2.08	2.07	2.06	2.05	2.05	2.04	2.03	2.02	2.02	2.01
22	2.06	2.05	2.04	2.03	2.02	2.01	2.00	2.00	1.99	1.98
23	2.04	2.02	2.01	2.01	2.00	1.99	1.98	1.97	1.97	1.96
24	2.01	2.00	1.99	1.98	1.97	1.97	1.96	1.95	1.95	1.94
25	2.00	1.98	1.97	1.96	1.96	1.95	1.94	1.93	1.93	1.92
26	1.98	1.97	1.96	1.95	1.94	1.93	1.92	1.91	1.91	1.90
27	1.96	1.95	1.94	1.93	1.92	1.91	1.90	1.90	1.89	1.88
28	1.95	1.93	1.92	1.91	1.91	1.90	1.89	1.88	1.88	1.87
29	1.93	1.92	1.91	1.90	1.89	1.88	1.88	1.87	1.86	1.85
30	1.92	1.91	1.90	1.89	1.88	1.87	1.86	1.85	1.85	1.84
35	1.87	1.85	1.84	1.83	1.82	1.82	1.81	1.80	1.79	1.79
40	1.83	1.81	1.80	1.79	1.78	1.77	1.77	1.76	1.75	1.74
50	1.77	1.76	1.75	1.74	1.73	1.72	1.71	1.70	1.69	1.69
60	1.73	1.72	1.71	1.70	1.69	1.68	1.67	1.66	1.66	1.65
70	1.71	1.70	1.68	1.67	1.66	1.65	1.65	1.64	1.63	1.62
80	1.69	1.68	1.67	1.65	1.64	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60
100	1.66	1.65	1.64	1.63	1.62	1.61	1.60	1.59	1.58	1.57
150	1.63	1.61	1.60	1.59	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.54
300	1.59	1.58	1.57	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50
1000	1.57	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47

Freiheitsgrade für den Nenner (kleinere Varianz)

Schranken der F-Verteilung für das Signifikanzniveau 5%

	Freiheitsgrade für den Zähler (größere Varianz)									
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	250	250	250	251	251	251	251	251	251	251
2	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	8.61	8.61	8.61	8.61	8.60	8.60	8.60	8.60	8.60	8.59
4	5.74	5.74	5.74	5.73	5.73	5.73	5.72	5.72	5.72	5.72
5	4.49	4.49	4.48	4.48	4.48	4.47	4.47	4.47	4.47	4.46
6	3.80	3.80	3.80	3.79	3.79	3.79	3.78	3.78	3.78	3.77
7	3.37	3.37	3.36	3.36	3.36	3.35	3.35	3.35	3.34	3.34
8	3.07	3.07	3.07	3.06	3.06	3.06	3.05	3.05	3.05	3.04
9	2.86	2.85	2.85	2.85	2.84	2.84	2.84	2.83	2.83	2.83
10	2.69	2.69	2.69	2.68	2.68	2.67	2.67	2.67	2.66	2.66
11	2.57	2.56	2.56	2.55	2.55	2.54	2.54	2.54	2.53	2.53
12	2.46	2.46	2.45	2.45	2.44	2.44	2.44	2.43	2.43	2.43
13	2.38	2.37	2.37	2.36	2.36	2.35	2.35	2.35	2.34	2.34
14	2.30	2.30	2.29	2.29	2.28	2.28	2.28	2.27	2.27	2.27
15	2.24	2.24	2.23	2.23	2.22	2.22	2.21	2.21	2.21	2.20
16	2.19	2.18	2.18	2.17	2.17	2.17	2.16	2.16	2.15	2.15
17	2.14	2.14	2.13	2.13	2.12	2.12	2.11	2.11	2.11	2.10
18	2.10	2.10	2.09	2.09	2.08	2.08	2.07	2.07	2.07	2.06
19	2.07	2.06	2.06	2.05	2.05	2.04	2.04	2.03	2.03	2.03
20	2.03	2.03	2.02	2.02	2.01	2.01	2.01	2.00	2.00	1.99
21	2.00	2.00	1.99	1.99	1.98	1.98	1.98	1.97	1.97	1.96
22	1.98	1.97	1.97	1.96	1.96	1.95	1.95	1.95	1.94	1.94
23	1.95	1.95	1.94	1.94	1.93	1.93	1.93	1.92	1.92	1.91
24	1.93	1.93	1.92	1.92	1.91	1.91	1.90	1.90	1.90	1.89
25	1.91	1.91	1.90	1.90	1.89	1.89	1.88	1.88	1.88	1.87
26	1.89	1.89	1.88	1.88	1.87	1.87	1.87	1.86	1.86	1.85
27	1.88	1.87	1.87	1.86	1.86	1.85	1.85	1.84	1.84	1.84
28	1.86	1.86	1.85	1.85	1.84	1.84	1.83	1.83	1.82	1.82
29	1.85	1.84	1.84	1.83	1.83	1.82	1.82	1.81	1.81	1.81
30	1.83	1.83	1.82	1.82	1.81	1.81	1.80	1.80	1.80	1.79
35	1.78	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.74	1.74	1.74
40	1.74	1.73	1.73	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69
50	1.68	1.67	1.67	1.66	1.66	1.65	1.65	1.64	1.64	1.63
60	1.64	1.64	1.63	1.62	1.62	1.61	1.61	1.60	1.60	1.59
70	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.58	1.57	1.57
80	1.59	1.59	1.58	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.55	1.54
100	1.57	1.56	1.55	1.55	1.54	1.54	1.53	1.52	1.52	1.52
150	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	1.50	1.49	1.49	1.48	1.48
300	1.49	1.48	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45	1.45	1.44	1.43
1000	1.46	1.46	1.45	1.44	1.43	1.43	1.42	1.42	1.41	1.41

Schranken der F-Verteilung für das Signifikanzniveau 5%

	Freiheitsgrade für den Zähler (größere Varianz)										
	45	50	60	70	80	100	120	150	300	1000	
Freiheitsgrade für den Nenner (kleinere Varianz)	1	251	252	252	252	253	253	253	253	254	254
	2	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
	3	8.59	8.58	8.57	8.57	8.56	8.55	8.55	8.54	8.54	8.53
	4	5.71	5.70	5.69	5.68	5.67	5.66	5.66	5.65	5.64	5.63
	5	4.45	4.44	4.43	4.42	4.41	4.41	4.40	4.39	4.38	4.37
	6	3.76	3.75	3.74	3.73	3.72	3.71	3.70	3.70	3.68	3.67
	7	3.33	3.32	3.30	3.29	3.29	3.27	3.27	3.26	3.24	3.23
	8	3.03	3.02	3.01	2.99	2.99	2.97	2.97	2.96	2.94	2.93
	9	2.81	2.80	2.79	2.78	2.77	2.76	2.75	2.74	2.72	2.71
	10	2.65	2.64	2.62	2.61	2.60	2.59	2.58	2.57	2.55	2.54
	11	2.52	2.51	2.49	2.48	2.47	2.46	2.45	2.44	2.42	2.41
	12	2.41	2.40	2.38	2.37	2.36	2.35	2.34	2.33	2.31	2.30
	13	2.33	2.31	2.30	2.28	2.27	2.26	2.25	2.24	2.23	2.21
	14	2.25	2.24	2.22	2.21	2.20	2.19	2.18	2.17	2.15	2.14
	15	2.19	2.18	2.16	2.15	2.14	2.12	2.11	2.10	2.09	2.07
	16	2.14	2.12	2.11	2.09	2.08	2.07	2.06	2.05	2.03	2.02
	17	2.09	2.08	2.06	2.05	2.03	2.02	2.01	2.00	1.98	1.97
	18	2.05	2.04	2.02	2.00	1.99	1.98	1.97	1.96	1.94	1.92
	19	2.01	2.00	1.98	1.97	1.96	1.94	1.93	1.92	1.90	1.88
	20	1.98	1.97	1.95	1.93	1.92	1.91	1.90	1.89	1.86	1.85
	21	1.95	1.94	1.92	1.90	1.89	1.88	1.87	1.86	1.83	1.82
	22	1.92	1.91	1.89	1.88	1.86	1.85	1.84	1.83	1.81	1.79
	23	1.90	1.88	1.86	1.85	1.84	1.82	1.81	1.80	1.78	1.76
	24	1.88	1.86	1.84	1.83	1.82	1.80	1.79	1.78	1.76	1.74
	25	1.86	1.84	1.82	1.81	1.80	1.78	1.77	1.76	1.73	1.72
	26	1.84	1.82	1.80	1.79	1.78	1.76	1.75	1.74	1.71	1.70
	27	1.82	1.81	1.79	1.77	1.76	1.74	1.73	1.72	1.70	1.68
	28	1.80	1.79	1.77	1.75	1.74	1.73	1.71	1.70	1.68	1.66
	29	1.79	1.77	1.75	1.74	1.73	1.71	1.70	1.69	1.66	1.65
	30	1.77	1.76	1.74	1.72	1.71	1.70	1.68	1.67	1.65	1.63
	35	1.72	1.70	1.68	1.66	1.65	1.63	1.62	1.61	1.58	1.57
	40	1.67	1.66	1.64	1.62	1.61	1.59	1.58	1.56	1.54	1.52
	50	1.61	1.60	1.58	1.56	1.54	1.52	1.51	1.50	1.47	1.45
	60	1.57	1.56	1.53	1.52	1.50	1.48	1.47	1.45	1.42	1.40
	70	1.55	1.53	1.50	1.49	1.47	1.45	1.44	1.42	1.39	1.36
	80	1.52	1.51	1.48	1.46	1.45	1.43	1.41	1.39	1.36	1.34
	100	1.49	1.48	1.45	1.43	1.41	1.39	1.38	1.36	1.32	1.30
	150	1.45	1.44	1.41	1.39	1.37	1.34	1.33	1.31	1.27	1.24
	300	1.41	1.39	1.36	1.34	1.32	1.30	1.28	1.26	1.21	1.17
	1000	1.38	1.36	1.33	1.31	1.29	1.26	1.24	1.22	1.16	1.11

5 Korrelationsanalyse

5.1 Kritische Werte für den Korrelationskoeffizienten von Pearson

Voraussetzung: Bivariate Normalverteilung

Nullhypothese: Keine Korrelation

Testgröße: $|r_{xy}|$, wobei

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

Signifikanzniveau α wählen. Aus Tabelle r_{krit} ablesen.

Falls $|r_{xy}| > r_{\text{krit}} \Rightarrow$ Nullhypothese verwerfen

α (zweiseitig)					α (zweiseitig)				
	10%	5%	2%	1%		10%	5%	2%	1%
n					n				
1	-	-	-	-	21	0.369	0.433	0.503	0.549
2	-	-	-	-	22	0.360	0.423	0.492	0.537
3	0.988	0.997	0.9995	0.9999	23	0.352	0.413	0.482	0.526
4	0.900	0.950	0.980	0.990	24	0.344	0.404	0.472	0.515
5	0.805	0.878	0.934	0.959	25	0.337	0.396	0.462	0.505
6	0.729	0.811	0.882	0.917	26	0.330	0.388	0.453	0.496
7	0.669	0.754	0.833	0.874	27	0.323	0.381	0.445	0.487
8	0.622	0.707	0.789	0.834	28	0.317	0.374	0.437	0.479
9	0.582	0.666	0.750	0.798	29	0.311	0.367	0.430	0.471
10	0.549	0.632	0.716	0.765	30	0.306	0.361	0.423	0.463
11	0.521	0.602	0.685	0.735	31	0.301	0.355	0.416	0.456
12	0.497	0.576	0.658	0.708	32	0.296	0.349	0.409	0.449
13	0.476	0.553	0.634	0.684	33	0.291	0.344	0.403	0.442
14	0.458	0.532	0.612	0.661	34	0.287	0.339	0.397	0.436
15	0.441	0.514	0.592	0.641	35	0.283	0.334	0.392	0.430
16	0.426	0.497	0.574	0.623	36	0.279	0.329	0.386	0.424
17	0.412	0.482	0.558	0.606	37	0.275	0.325	0.381	0.418
18	0.400	0.468	0.542	0.590	38	0.271	0.320	0.376	0.413
19	0.389	0.456	0.528	0.575	39	0.267	0.316	0.371	0.408
20	0.378	0.444	0.516	0.561	40	0.264	0.312	0.366	0.403

5.2 Kritische Werte für den Korrelationskoeffizienten von Spearman

Keine bivariate Normalverteilung vorausgesetzt.

Nullhypothese: Keine Korrelation

Testgröße: $|r_S|$, wobei

$$r_S = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n d_i^2 \quad (d_i = \text{Rangdifferenz})$$

Signifikanzniveau α wählen. Aus Tabelle r_{krit} ablesen.

Falls $|r_S| > r_{\text{krit}} \Rightarrow$ Nullhypothese verwerfen

α (zweiseitig)					α (zweiseitig)				
	10%	5%	2%	1%		10%	5%	2%	1%
n					n				
1	-	-	-	-	21	0.368	0.438	0.521	0.576
2	-	-	-	-	22	0.359	0.428	0.508	0.562
3	-	-	-	-	23	0.351	0.418	0.496	0.549
4	-	-	-	-	24	0.343	0.409	0.485	0.537
5	0.900	-	-	-	25	0.336	0.400	0.475	0.526
6	0.829	0.886	0.943	-	26	0.329	0.392	0.465	0.515
7	0.714	0.786	0.893	0.929	27	0.323	0.385	0.456	0.505
8	0.643	0.738	0.833	0.881	28	0.317	0.377	0.448	0.496
9	0.600	0.700	0.783	0.833	29	0.311	0.370	0.440	0.487
10	0.564	0.648	0.745	0.794	30	0.305	0.364	0.432	0.478
11	0.536	0.618	0.709	0.818	31	0.300	0.358	0.425	0.470
12	0.497	0.591	0.703	0.780	32	0.295	0.352	0.418	0.463
13	0.475	0.566	0.673	0.745	33	0.291	0.347	0.411	0.455
14	0.457	0.545	0.646	0.716	34	0.286	0.341	0.405	0.448
15	0.441	0.525	0.623	0.689	35	0.282	0.336	0.399	0.442
16	0.425	0.507	0.601	0.666	36	0.278	0.331	0.393	0.435
17	0.412	0.490	0.582	0.645	37	0.274	0.327	0.388	0.429
18	0.399	0.476	0.564	0.625	38	0.270	0.322	0.382	0.424
19	0.388	0.462	0.549	0.608	39	0.267	0.318	0.377	0.418
20	0.377	0.450	0.534	0.591	40	0.263	0.314	0.373	0.413

6 Chi-Quadrat-Tabelle

Nullhypothese H_0 : Stochastische Unabhängigkeit

Testgrösse χ^2 : Aus Randhäufigkeiten die unter H_0 erwarteten Häufigkeiten berechnen.
Differenzen zwischen den beobachteten und den erwarteten Häufigkeiten quadrieren
und durch die erwarteten Häufigkeiten dividieren. Die Summe dieser Zahlen ist χ^2 .

$m \times n$ Felder haben den Freiheitsgrad $(m - 1)(n - 1)$.

Signifikanzniveau α wählen. Aus Tabelle χ^2_{krit} ablesen.

Falls $\chi^2 > \chi^2_{\text{krit}} \Rightarrow$ Nullhypothese verwerfen

Freiheitsgrad	$\alpha = 10\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 2.5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 0.5\%$
1	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65
28	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67