Fourieranalyse
&
Fouriertransformation

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830)

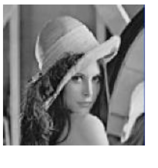
Literatur

1. Fundamentals of Computer Graphics
   P.Shirley et al.
   Kapitel 4.5

2. Digitale Bildverarbeitung
   B. Jähne
   Springer Verlag
   (Kapitel 3 und Anhang A)

Abtasten (resampling) von Bildern

z.B. wie verkleinert man ein Bild?



Was ist zu beachten?

Es kann aliasing auftreten!

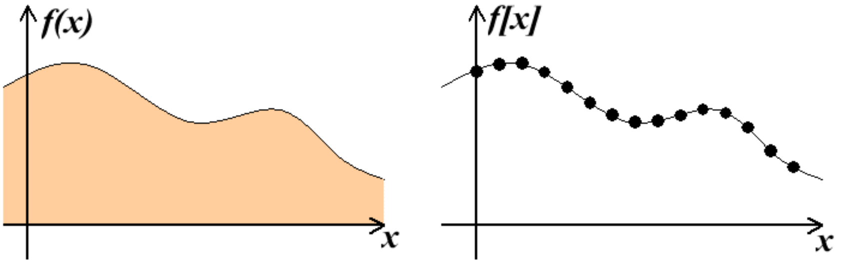
Fouriertheorie gibt die Antwort ===>

Bilder und Pixel

In unser Vorstellung ist die reale Welt meist stetig ! ? ?
Im Computer ist alles diskret!

Das Abbilden einer stetigen *Funktion* auf eine diskrete nennt man *Abtasten* !

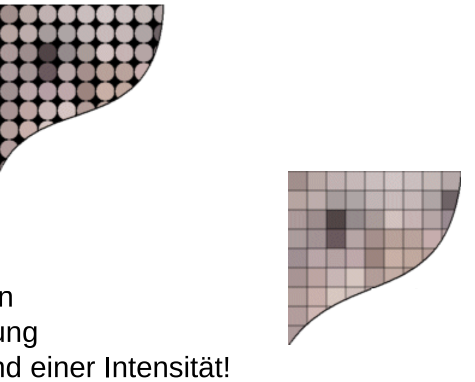
Das Abbilden eines stetigen *Wertes* auf einen diskreten nennt man *Quantisieren* !



Zum Darstellen eines Bildes im Computer müssen wir abtasten und quantisieren!

Was ist ein Pixel – formal?

Ein Pixel ist kein:
Kreis,
Quadrat,
. . .



ein Pixel ist ein Punkt,
mit keiner Dimension
mit keiner Ausdehnung
mit einer Position und einer Intensität!

Ein Pixel ist ein Abtastwert!

Fourierreihe

Eine eindimensionale periodische Funktion $f(x)$ mit Periodelänge λ lässt sich exakt durch eine Reihe trigonometrischer Funktionen darstellen.

Diese Reihe heißt *Fourierreihe:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \right) \qquad \text{mit} \qquad \omega = \frac{2\pi}{\lambda}$$

mit den *Fourierkoeffizienten* a_k, b_k

$$a_k = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) \cos(k\omega x)\, dx, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) \sin(k\omega x)\, dx, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Beliebige Funktionen lassen sich durch eine solche Reihe approximieren.

Fourierreihe im Komplexen

Rechnen mit trigonometrischen Reihen wird leicht unübersichtlich!

Rechnen in komplexer Darstellung ist einfacher!

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{mit Euler-Identität} \\ &\quad e^{ik\omega x} = \cos(k\omega x) + i \sin(k\omega x), \quad i = \sqrt{-1} \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

und den *komplexen Fourierkoeffizienten* c_k

$$c_k = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) e^{-ik\omega x} dx \quad = \begin{cases} \frac{1}{2} a_0 & \text{k=0} \\ \frac{1}{2}(a_k - i b_k) & \text{k>0} \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + i b_{-k}) & \text{k<0} \end{cases}$$

Fourierreihe → Fouriertransformation

$$c_k = \frac{1}{\lambda} \int_{x_0}^{x_0+\lambda} f(x) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}kx} dx, \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

Der Grenzübergang von Funktionen aus ganzzahligen Vielfachen einer Periode zu nicht periodischen Funktionen $(\lambda = \infty)$ ergibt:

$$\Rightarrow F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi iux} dx$$

$F(u)$ ist die Fouriertransformierte von $f(x)$

$f(x) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(u)$

Die inverse Fouriertransformation:

$$\Rightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2\pi iux} du$$

$f(x)$ ist die inverse Fouriertransformierte von $F(u)$

$f(x) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(u)$

Fouriertransformation darstellen

Die Fouriertransformierte F einer reellen Funktion ist meist eine komplexe Funktion.

$$F(u) = \operatorname{Re} F(u) + i \operatorname{Im} F(u)$$

Die komplexe Zahl können wir in der komplexen Zahlenebene als Vektor darstellen.

Entweder durch Real- und Imaginärteil,

oder durch Betrag und Phase.

Betrag:
$$|F(u)| = \sqrt{[\operatorname{Re} F(u)]^2 + [\operatorname{Im} F(u)]^2}$$

Phase:
$$\varphi(u) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} F(u)}{\operatorname{Re} F(u)}\right)$$

$$F(u) = |F(u)| \exp(i\varphi(u))$$

Fouriertransformation und Ortsfrequenz

$$\Rightarrow F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \; e^{-2\pi iux} \; dx$$

Die Funktion $exp(-i2\pi ux)$ ist der Kern der Fouriertransformierten.
Der Kern der Inversen ist $exp(i2\pi ux)$.

Die Funktionen $exp(-i2\pi ux)$ bilden ein System orthonormaler Funktionen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi iux} \; e^{2\pi iu'x} \; dx \; = \delta(u-u')$$

Delta'funktion' :

$\delta(x) = 0, \text{ für } x \neq 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\, f(x)dx = f(x_0)$

Die Fouriertransformierte F liefert eine Entwicklung der Funktion f in ein kontinuierliches Spektrum, wobei die Variable u als Ortsfrequenz bezeichnet wird.

Fouriertransformation (Beispiele)

Kosinus- Sinusfunktionen mit $k_0 = \pm \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$f(x) = a\cos(k_0 x) \quad ○\!\!-\!\!● \quad F(k) = \frac{a}{2}\delta(k-k_0) + \frac{a}{2}\delta(k+k_0)$$

$$f(x) = a\sin(k_0 x) \quad ○\!\!-\!\!● \quad F(k) = -i\frac{a}{2}\delta(k-k_0) + i\frac{a}{2}\delta(k+k_0)$$

Deltafunktion:

$$f(x) = K\delta(x) \quad ○\!\!-\!\!● \quad F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K\delta(x)e^{-i2\pi ux}dx$$

$$= Ke^0 \quad = K$$

Delta 'funktion' :

$\delta(x) = 0, \text{ für } x \neq 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\, f(x)dx = f(x_0)$

Fouriertransformation (Beispiele 1)

Periodische Funktionen:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i \frac{k}{\Delta x} x} \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad F(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta\left(u - \frac{k}{\Delta x}\right)$$

Beweis:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \, e^{2\pi i u x} du$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta\left(u - \frac{k}{\Delta x}\right) e^{2\pi i u x} du$$

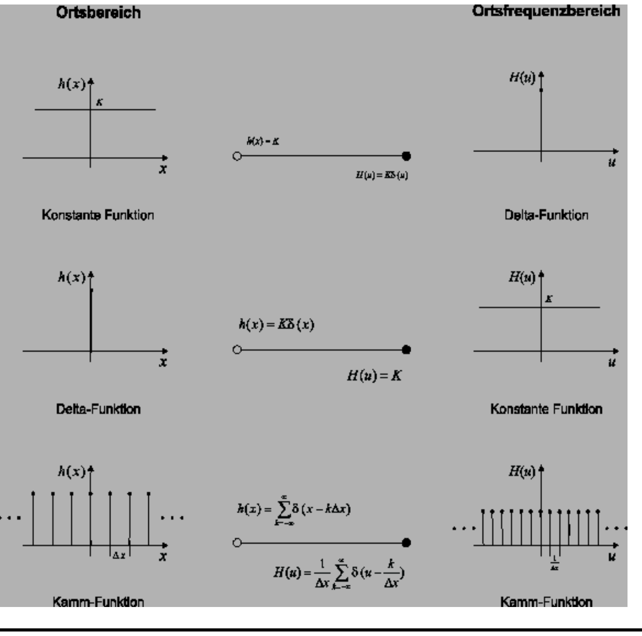
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(u - \frac{k}{\Delta x}\right) e^{2\pi i u x} du = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{2\pi i \frac{k}{\Delta x} x}$$

q.e.d.

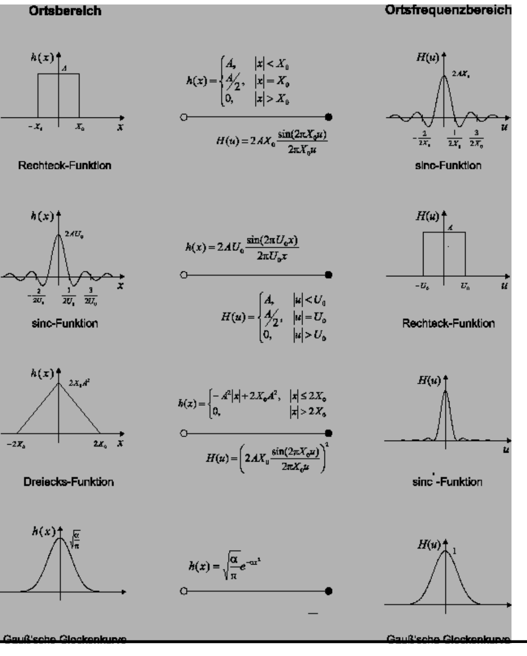
Deltakamm:

$$h(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(x - k\Delta x) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{ik\frac{2\pi}{\Delta x} x} \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad H(u) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta\left(u - \frac{k}{\Delta x}\right)$$

Beispiele (2)



Beispiele (3)



2D-Fouriertransformation

$$F(\vec{k}) = \frac{1}{(2\Pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x})\, \underline{e^{-i\vec{k}\vec{x}}}\, d^2\vec{x}$$

Dabei ist k der Wellenvektor mit : $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$

Aus $i\vec{k}\vec{x} = i(k_1 x_1 + k_2 x_2) \quad \Rightarrow \quad \underline{e^{(-i\vec{k}\vec{x})}} = e^{(-ik_1 x_1)} e^{(-ik_2 x_2)}$

$$\Rightarrow F(\vec{k}) = \frac{1}{(2\Pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x})\, e^{-ik_1 x_1}\, dx_1 \right) e^{-ik_2 x_2} dx_2$$

Somit kann man die 2D-FT hintereinander in zwei separaten 1D-FT ausführen

Eigenschaften der Fouriertransformation

Addition:

$$a f(x) + b g(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad a F(u) + b G(u)$$

Ähnlichkeit:

$$f(a x_1, b x_2) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{|\mathrm{ab}|} F\left(\frac{k_1}{a}, \frac{k_2}{b}\right)$$

Verschiebung:

$$f(x - x_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(k) e^{-ikx_0}$$

$$f(x) e^{ikx_0} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(k - k_0)$$

Symmetrie:

$$f_g(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F_g(k)$$

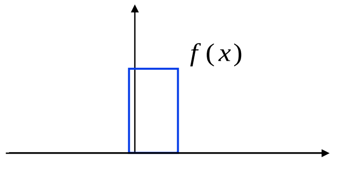
$$f_u(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F_u(k)$$

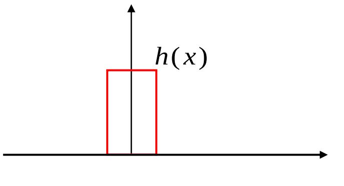
Eigenschaften (2): Das Faltungstheorem

Faltungsintegral:

$$g(x) = f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\, h(x - x') dx'$$

$$= h(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x')\, f(x - x') dx'$$



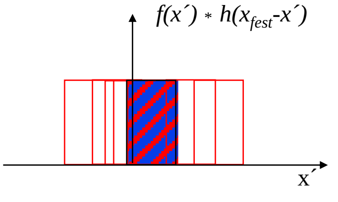


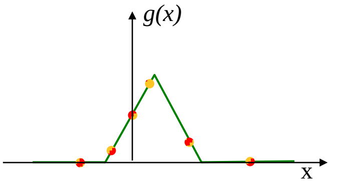
Eigenschaften (2): Das Faltungstheorem

Faltungsintegral:

$$g(x) = f(x) * h(x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\, h(x-x')dx'$$

$$= h(x) * f(x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(x')\, f(x-x')dx'$$





Eigenschaften (2): Das Faltungstheorem

Faltungsintegral:

$$g(x) = f(x) * h(x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\, h(x-x')dx'$$

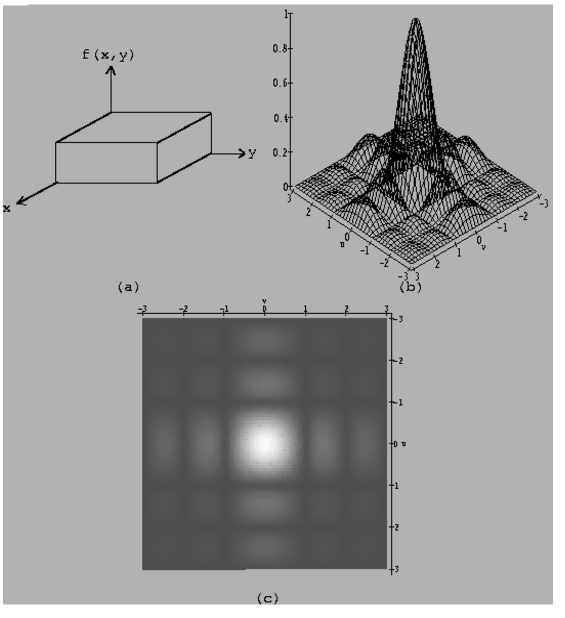
$$= h(x) * f(x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(x')\, f(x-x')dx'$$

Faltung ist im Fourierraum ganz einfach:

$$h(x) * f(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad H(k)F(k)$$

$$h(x)f(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad H(k) * F(k)$$

2D-Fouriertransformation



Abtastheorem (*Nyquist*)

Ein kontinuierliches Bildsignal *f(x)* soll nun auf ein *m x n* Raster abgebildet werden

Problem:
Aus *f(x)* müssen *m x n* Werte so bestimmt werden, dass das Signal aus diesen *m x n* Werten wieder rekonstruiert werden kann.

Die in Δx Schritten abgetastete Funktion *f(x)* sei:

$$\hat{f}(x) = f(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\Delta x)$$

Nach dem Faltungssatz gilt:

$$\hat{F}(u) = F(u) * \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - \frac{k}{\Delta x})$$

Abtastheorem (2)

$$\hat{F}(u) = F(u) * \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(u - \frac{k}{\Delta x}\right)$$

Das heißt:

Die F-Transformierte der abgetasteten Funktion $\hat{F}(u)$ ist die Faltung des Spektrums der original Funktion $F(u)$ mit dem Deltakamms mit der Periodizität $\frac{1}{\Delta x}$.

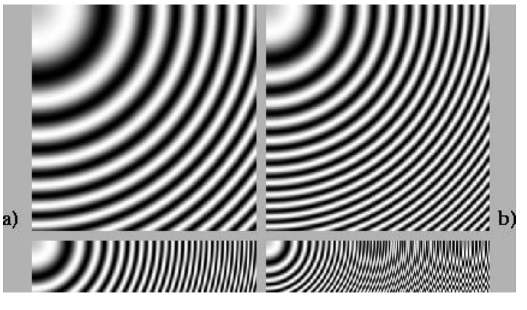
Das heißt:

Das Spektrum der Originalfunktion tritt periodisch in $\hat{F}(u)$ auf!
Somit kann es auch überlappen!

Diese Überlappungsartefakte werden mit Aliasing bezeichnet!

Wie lassen sie sich vermeiden?

Abtastheorem (3)



Abhilfe:
Das Bild muss vor dem Abtasten so gefiltert werden, dass es zu keinen Überlappungen des Spektrums kommen kann!

Da die Abtastung mit Δx eine Periodizität im Spektrum von $\frac{1}{\Delta x}$ bewirkt, dürfen keine Frequenzen $> \frac{1}{2\Delta x}$ auftreten.

Diese Grenzfrequenz wird auch mit Nyquist-Frequenz bezeichnet.

Abtastheorem (4)