Projektionen

wie schon immer ...

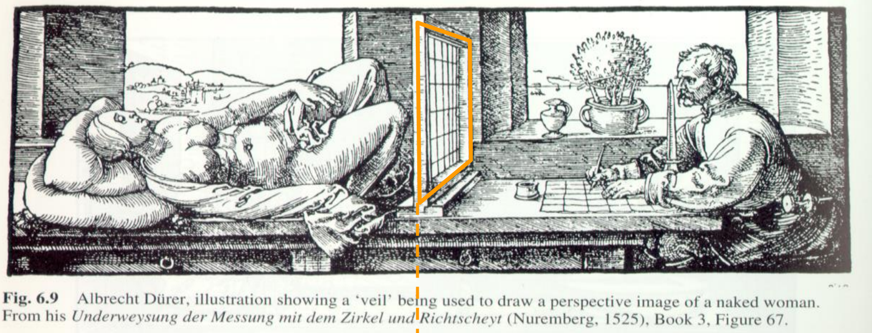
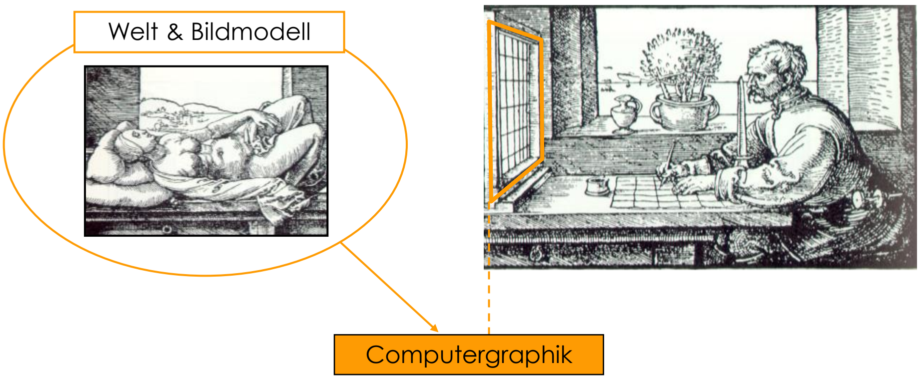


Fig. 6.9 Albrecht Dürer, illustration showing a 'veil' being used to draw a perspective image of a naked woman. From his *Underweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheyt* (Nuremberg, 1525), Book 3, Figure 67.

Computergraphik

Bilderzeugung ?



Graphics Pipeline

- Modeling Transformations
- Illumination (Shading)
- Viewing Transformation (Perspective / Orthographic)
- Clipping
- Projection (to Screen Space)
- Scan Conversion (Rasterization)
- Visibility / Display

Input:

Geometrische Modelle:
Beschreibung aller Objekte, Oberflächen, Position der Lichtquellen.

Beleuchtungsmodell:
Rechenvorschriften zur Simulation der Interaktion von Materie und Licht

Blickwinkel:
Kamera oder Augenposition, "viewing frustum"

Raster Bereich
"Viewport", Pixelgrid in welches die Bildeben abgebildet wird

Output:

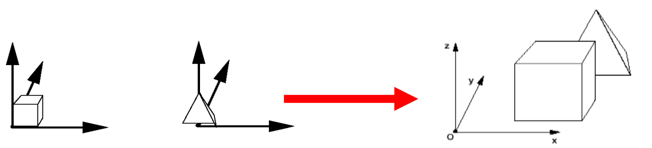
Farben / Intensitäten:
Angepasst an den Framebuffer und den Bildschirm (z.B. 24-bit RGB Werte)
.

Modeling Transformations

- Modeling Transformations
- Illumination (Shading)
- Viewing Transformation (Perspective / Orthographic)
- Clipping
- Projection (to Screen Space)
- Scan Conversion (Rasterization)
- Visibility / Display

3D Modelle haben eigenes Koordinatensystem (object space)

"Modeling transforms" orientieren die Modelle in einem gemeinsamen Koordinatensystem (world space)



Object space   World space

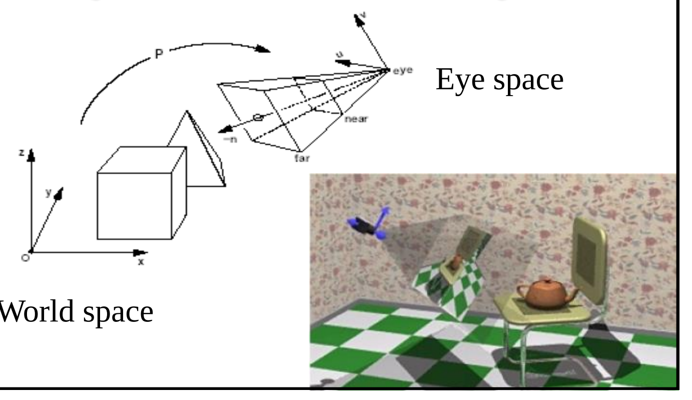
Perspektivische Projektion 3D => 2D

Viewing Transformation

- Modeling Transformations
- Illumination (Shading)
- **Viewing Transformation (Perspective / Orthographic)**
- Clipping
- Projection (to Screen Space)
- Scan Conversion (Rasterization)
- Visibility / Display

Abbildung der Weltkoordinaten in Kamerakoordinaten.

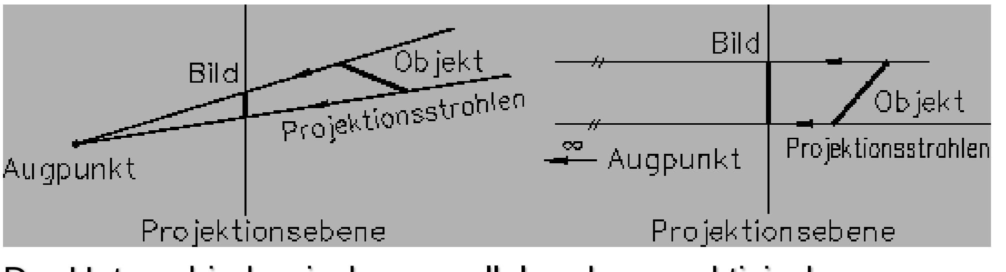
Blickrichtung wird i.a. in den Ursprung und entlang einer Koordinatenachse gewählt.



Betrachten dreidimensionaler Szenen

Ebene geometrische Projektionen: Der Wechsel von 3D-Koordinaten zu 2D Bildschirmkoordinaten!

perspektivisch parallel



Der Unterschied zwischen parallel und perspektivischer Projektionen liegt im Abstand des Projektionszentrums (Augpunkt) zur Projektionsebene und zum Objekt.

Parameter einer 3D-Ansicht.

Bild-, Projektions-ebene	*(viewing plane VP)*
Blickpunkt	*(view reference point VRP)*
Normale der Bildebene	*(viewing plane normal VPN)*
Abstand der Bildebene zum Augpunkt	*(viewing plane distance VPD)*
Oben Richtung	(viewing up VUP)
Bildschirmmitte	*(center of window CW)*
Projektionsrichtung	*(direction of projection DOP)*
Augpunkt	*(projection referenec point PRP)*
Vordere und hinter Clippingebene	*(front and back plane FP BP)*

Betrachten dreidimensionaler Szenen (3)

Die Parallel- als auch die perspektivische Projektion werden in viele Projektionstypen aufgespalten.

Parallelprojektionen

Rechtwinklig:

- Hauptriss
- Axionometrische: iso-,di-
  tri-metrische

Schiefwinklig: Kavalier, Kabinett

Perspektivische Projektionen

1 Punkt , 2Punkt, 3Punkt

Homogene Koordinaten 2D

2D Kartesische Koordinaten ---> Homogene Koordinaten

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \end{bmatrix},$$

$$\text{wobei } \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \end{bmatrix} \text{ und } k * \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \end{bmatrix}$$

$$\text{den selben Punkt } P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ beschreiben.}$$

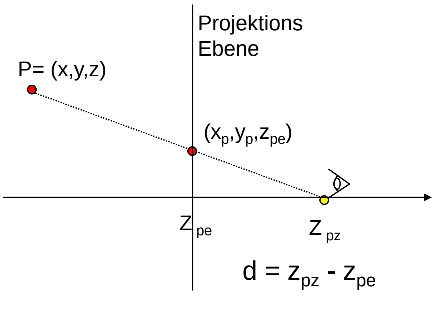
Perspektivische Projektion

Projektion von 3D-Koordinaten zu 2D Bildschirmkoordinaten!

Annahmen:

Augpunkt auf der z-Achse $(0,0,z_{pz})$

Projektionsebene $\perp$ z-Achse



Strahlensatz:

$$\frac{x_p}{x} = \frac{z_{pz} - z_{pe}}{z_{pz} - z}$$

$$\Rightarrow x_p = x\left(\frac{z_{pz} - z_{pe}}{z_{pz} - z}\right) = x\left(\frac{d}{z_{pz} - z}\right)$$

$$y_p = y\left(\frac{z_{pz} - z_{pe}}{z_{pz} - z}\right) = y\left(\frac{d}{z_{pz} - z}\right)$$

$$z_p = z_{pe} \quad \forall z$$

Perspektivische Projektion

Homogenen Koordinaten

$$\begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ h \end{bmatrix} = h \cdot \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_{pe} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{perspektiv} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_{pe} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{z_{pz} - z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{z_{pz} - z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{z_{pe}}{z_{pz} - z} & z_{pe}\left(\frac{z_{pz}}{z_{pz} - z}\right) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{z_{pz} - z} & \frac{z_{pz}}{z_{pz} - z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Perspektivische Projektion

Homogenen Koordinaten

$$\begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ h \end{bmatrix} = h \cdot \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_{pe} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{perspektiv} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\text{mit} \quad h = \frac{z_{pz} - z}{d} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{z_{pe}}{d} & z_{pe}\left(\frac{z_{pz}}{d}\right) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} & \frac{z_{pz}}{d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Perspektivische Projektion (Sonderfall 1)

Bisherige Annahmen: Augpunkt auf der z-Achse $(0,0,z_{pz})$, Projektionsebene $\perp$ z-Achse

$$M_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{z_{pe}}{d} & z_{pe}\left(\frac{z_{pz}}{d}\right) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} & \frac{z_{pz}}{d} \end{bmatrix}$$

A) mit $z_{pz} = 0$ und $z_{pe} = -d'$ $\quad\Rightarrow\quad d = d'$ und $h = \frac{z}{d'}$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{M'}_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d'} & 0 \end{bmatrix}$$

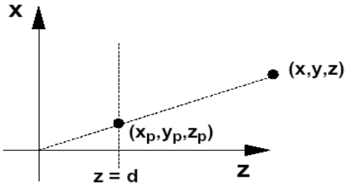
Perspektivische Projektion

Projiziere alle Punkte entlang der *z-Achse* auf die *z* = *d* Ebene, Augpunkt im Ursprung

$$x_p = \frac{d \cdot x}{z} = \frac{x}{z/d}$$

$$y_p = \frac{d \cdot y}{z} = \frac{y}{z/d}$$

$$z_p = d$$



homogenize

$$\begin{pmatrix} x \cdot d/z \\ y \cdot d/z \\ d \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z/d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Perspektivische Projektion (Sonderfall 2)

Bisherige Annahmen: Augpunkt auf der z-Achse $(0,0,z_{pz})$, Projektionsebene $\perp$ z-Achse

$$M_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{z_{pe}}{d} & z_{pe}\left(\frac{z_{pz}}{d}\right) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} & \frac{z_{pz}}{d} \end{bmatrix}$$

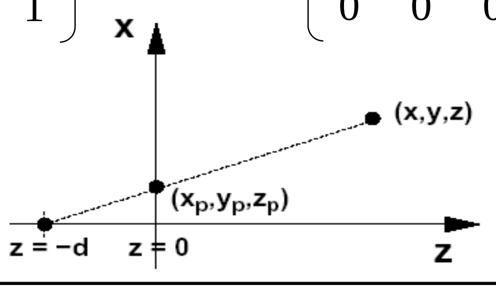
B) mit $z_{pz} = -d'$ und $z_{pe} = 0$ $\Rightarrow \quad d = -d' \quad \text{und} \quad h = \frac{d'+z}{d'}$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{M'}_{\mathrm{per}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d'} & 1 \end{bmatrix}$$

Grenzübergang, $d \to \infty$

diese perspektivische Projektionsmatrix... ...ist eine orthographische Projektion

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

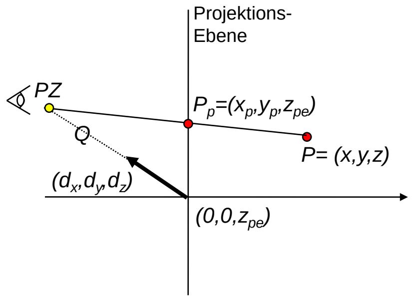


Perspektivische Projektion (allgemein)

Annahmen:

Projektionsebene $\perp$ z-Achse

~~Augpunkt auf der z-Achse $(0,0,z_{pz})$~~



P_p liegt auf der Strecke S zwischen PZ und P

$$PZ + t(P - PZ), \qquad 0 \le t \le 1$$

mit $PZ = (0,0,z_{pe}) + Q(d_x, d_y, d_z)$

folgt für einen Punkt $P' = (x', y', z')$ auf S.

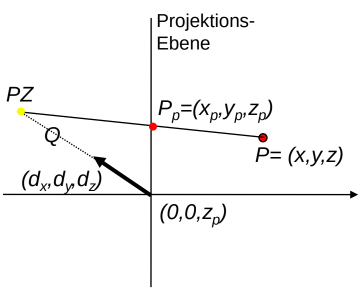
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Qd_x \\ Qd_y \\ z_{pe} + Qd_z \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} x - Qd_x \\ y - Qd_y \\ z - \left(z_{pe} + Qd_z\right) \end{bmatrix}$$

löse die Gleichungen für $z' = z_{pe} = z_p$

nach t, $x' = x_p$ und $y' = y_p$

Perspektivische Projektion (allgemein)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Qd_x \\ Qd_y \\ z_p + Qd_z \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} x - Qd_x \\ y - Qd_y \\ z - \left(z_p + Qd_z\right) \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$



für $z' = z_p$

$$(3) \qquad \Rightarrow t = \frac{z_p - \left(z_p + Qd_z\right)}{z - \left(z_p + Qd_z\right)}$$

$$(3) \text{ in } (1) \qquad x_p = \frac{x - z\dfrac{d_x}{d_z} + z_p\dfrac{d_x}{d_z}}{\dfrac{z_p - z}{Qd_z} + 1}, \qquad (3) \text{ in } (2) \qquad y_p = \frac{y - z\dfrac{d_y}{d_z} + z_p\dfrac{d_y}{d_z}}{\dfrac{z_p - z}{Qd_z} + 1}$$

Perspektivische Projektion (allgemein)

$$x_p = \frac{x - z\dfrac{d_x}{d_z} + z_p \dfrac{d_x}{d_z}}{\dfrac{z_p - z}{Qd_z} + 1} \; , \qquad h = \frac{1}{\dfrac{z_p - z}{Qd_z} + 1}$$

$$y_p = \frac{y - z\dfrac{d_y}{d_z} + z_p \dfrac{d_y}{d_z}}{\dfrac{z_p - z}{Qd_z} + 1}$$

$$z_p = z_p \frac{\dfrac{z_p - z}{Qd_z} + 1}{\dfrac{z_p - z}{Qd_z} + 1}$$

$$M_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{d_x}{d_z} & z_p \dfrac{d_x}{d_z} \\ 0 & 1 & -\dfrac{d_y}{d_z} & z_p \dfrac{dy}{d_z} \\ 0 & 0 & -\dfrac{z_p}{Qd_z} & \dfrac{z_p^2}{Qd_z} + z_p \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{Qd_z} & \dfrac{z_p}{Qd_z} + 1 \end{bmatrix}$$

Perspektivische Projektion (allgemein)

$$M_{\text{allgemein}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{d_x}{d_z} & z_p \dfrac{d_x}{d_z} \\ 0 & 1 & -\dfrac{d_y}{d_z} & z_p \dfrac{d_y}{d_z} \\ 0 & 0 & -\dfrac{z_p}{Qd_z} & \dfrac{z_p^2}{Qd_z} + z_p \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{Qd_z} & \dfrac{z_p}{Qd_z} + 1 \end{bmatrix}$$

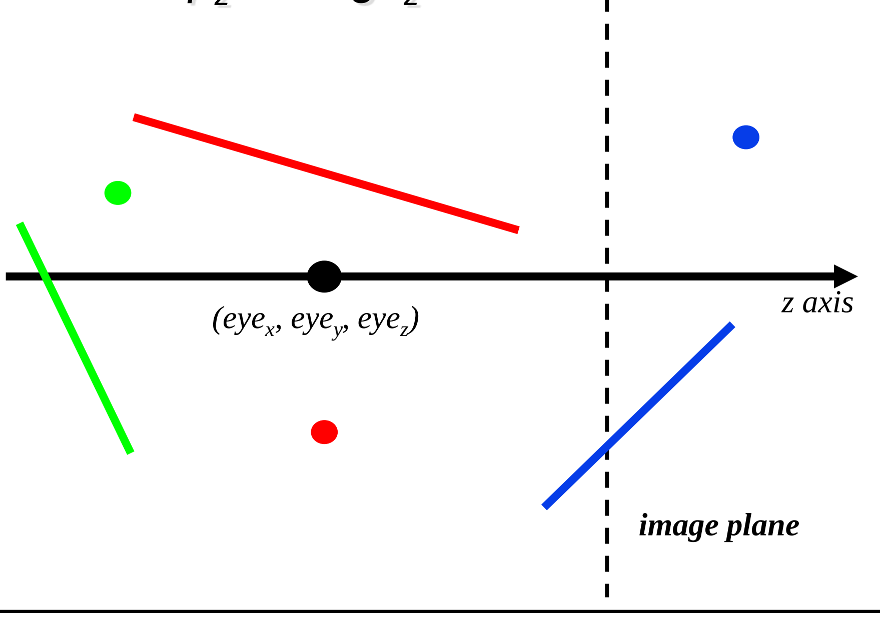
	Z_p	Q	$[\,d_x \;\; d_y \;\; d_z\,]$
M_{ort}	0	∞	$[\,0 \;\; 0 \;\; -1\,]$
M_{per}	d	d	$[\,0 \;\; 0 \;\; -1\,]$
M'_{per}	0	d	$[\,0 \;\; 0 \;\; -1\,]$

Parallel Projektion

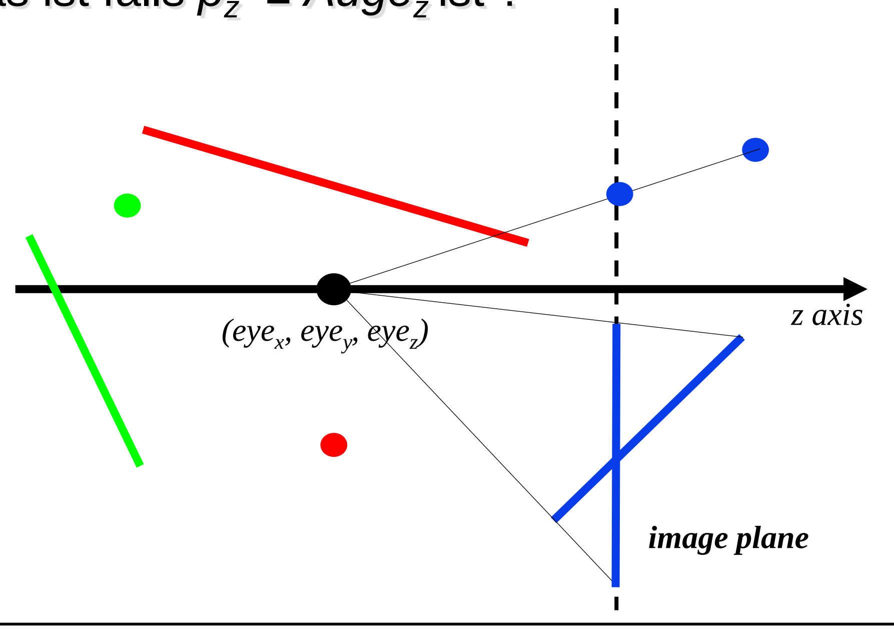
$$M_{\text{allgemein}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{d_x}{d_z} & z_p \frac{d_x}{d_z} \\ 0 & 1 & -\frac{d_y}{d_z} & z_p \frac{d_y}{d_z} \\ 0 & 0 & -\frac{z_p}{Qd_z} & \frac{z_p^2}{Qd_z} + z_p \\ 0 & 0 & -\frac{1}{Qd_z} & \frac{z_p}{Qd_z} + 1 \end{bmatrix}$$

	Z_p	Q	$[\ d_x \quad d_y \quad d_z\ ]$
Cavalier	0	∞	$[\cos\alpha \quad \sin\alpha \quad -1]$
Cabinet	0	∞	$\left[\frac{\cos\alpha}{2} \quad \frac{\sin\alpha}{2} \quad -1\right]$

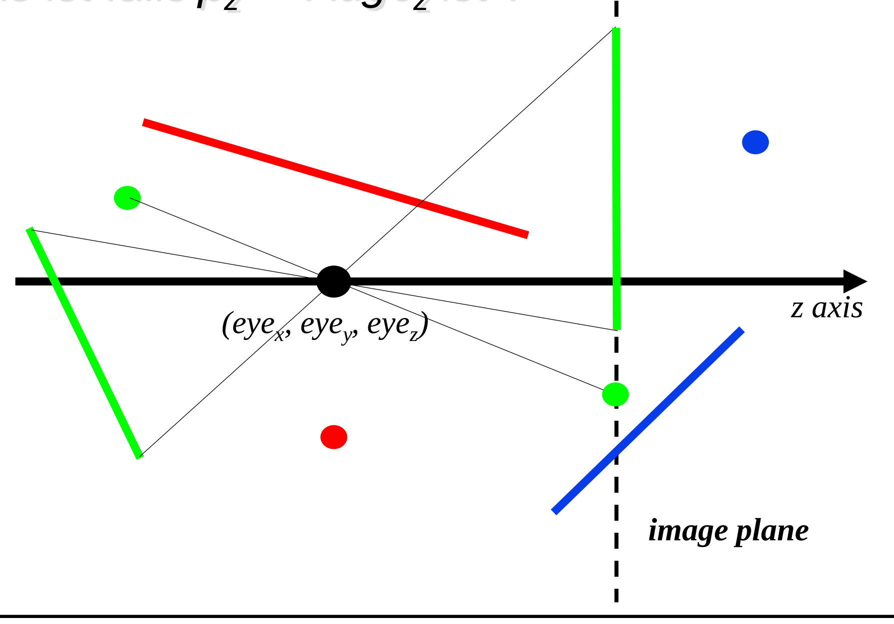
Was ist falls $p_z \leq Auge_z$ ist ?



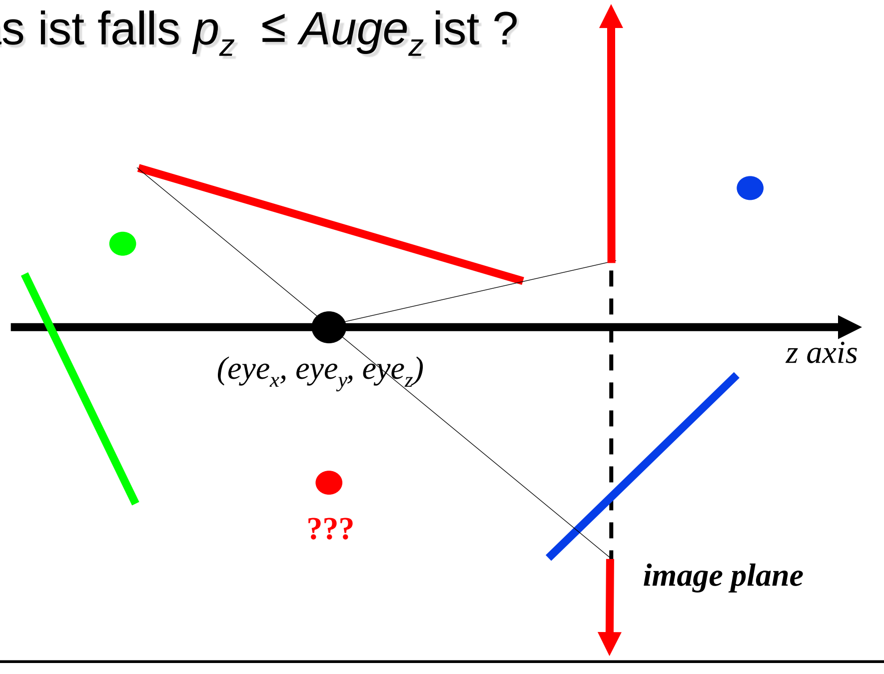
Was ist falls $p_z \le Auge_z$ ist ?



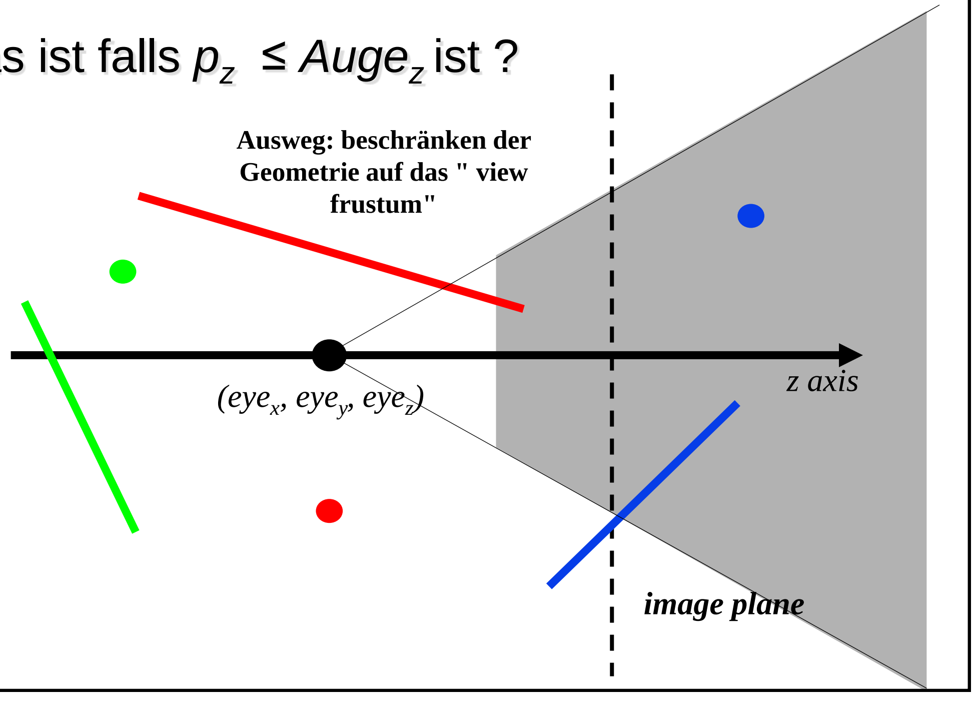
Was ist falls $p_z \le Auge_z$ ist ?



Was ist falls $p_z \leq Auge_z$ ist ?

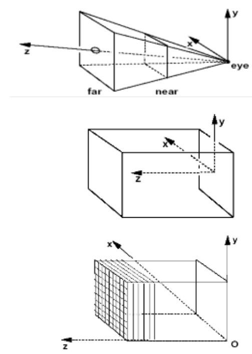


Was ist falls $p_z \leq Auge_z$ ist ?



Projektionen der "pipeline"?

- Modeling Transformations
- Illumination (Shading)
- Viewing Transformation (Perspective / Orthographic)
- Clipping
- Projection (to Screen Space)
- Scan Conversion (Rasterization)
- Visibility / Display

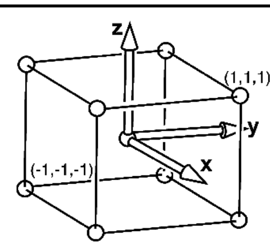


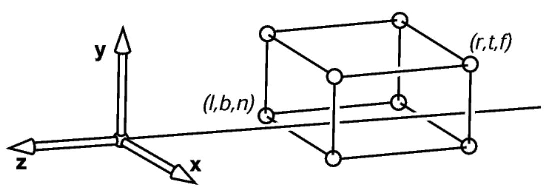
Camera /eye Space

Normalized Device Coordiantes

Screen Space

Normalizing the Viewing Volume





Orthographic viewing volume:

$x = l$:= left plane

$x = r$:= right plane

$y = b$:= bottom plane

$y = t$:= top plane

$z = n$:= near plane

$z = f$:= far plane

$$\begin{bmatrix} x_{normalized} \\ y_{normalized} \\ z_{normalized} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{n-f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{l+r}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b+t}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n+f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Orthographic Projection

$$\begin{bmatrix} x_{pixel} \\ y_{pixel} \\ z_{normalized} \\ 1 \end{bmatrix} = [M_{sreeen}] \cdot \begin{bmatrix} x_{normalized} \\ y_{normalized} \\ z_{normalized} \\ 1 \end{bmatrix} = [M_o] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

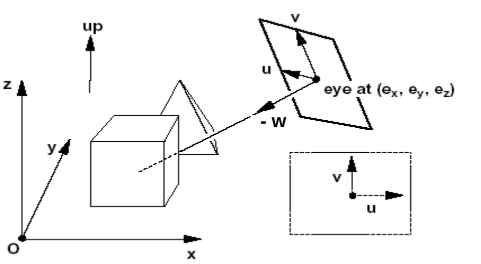
$$\begin{bmatrix} x_{pixel} \\ y_{pixel} \\ z_{normalized} \\ 1 \end{bmatrix} = [M_{screen}] \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{r-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{r-f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{l+r}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b+t}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n+f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{pixel} \\ y_{pixel} \\ z_{normalized} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n_x}{2} & 0 & 0 & \frac{n_x-1}{2} \\ 0 & \frac{n_y}{2} & 0 & \frac{n_y-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{r-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{r-f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{l+r}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b+t}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n+f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Viewing Transformation

Welt Koordinaten → Kamera koordinaten

Positionieren der Kamera



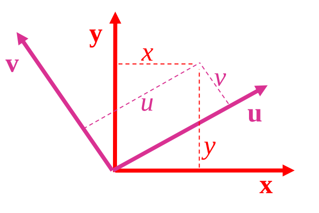
Translation + Änderung der orthonormal Basis

Gegeben:

Koordinaten **xyz** & **uvn,**
und der Punkt **p** = (*x*,*y*,*z*)

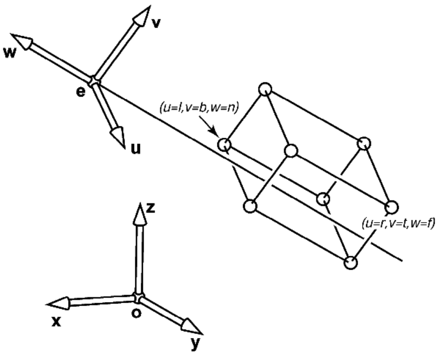
Finde:

p = (*u*,*v*,*w*)



Viewing Transformation

Positionieren der Kamera



Gegeben:

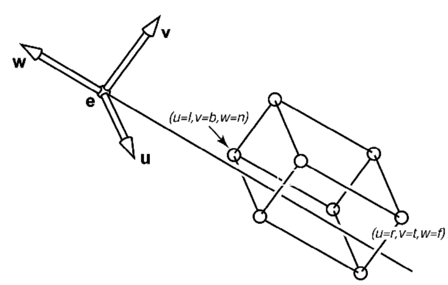
Koordinaten **xyz** & **uvw, e**
und der Punkt **p** = (*x,y,z*)

Finde:

p = (*u,v,w*)

$$M_v = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ w_x & w_y & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e_x \\ 0 & 1 & 0 & -e_y \\ 0 & 0 & 1 & -e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Full orthoraphic projection pipeline



compute: M_v

compute: M_o

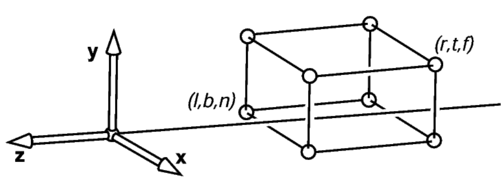
$M = M_o M_v$

For each line segment (a_i, b_i) **do**

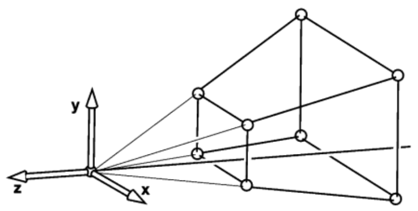
$p = M a_i$

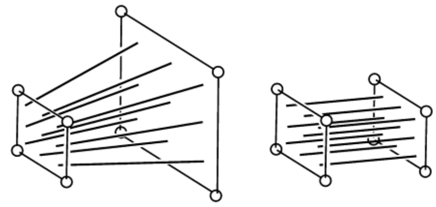
$q = M b_i$

draw line (x_p, y_p, x_q, y_q)



Perspective Projection





$$M_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+f}{n} & -f \\ 0 & 0 & \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h \cdot x' \\ h \cdot y' \\ h \cdot z' \\ h \end{bmatrix} = [M_P] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Full perspective projection pipeline

compute: M_v

compute: M_o

compute: M_P

$M = M_o M_P M_v$

For each line segment (a_i, b_i) **do**

$p = M a_i$

$q = M b_i$

draw-line (x_p/h_p, y_p/h_p, x_q/h_q, y_q/h_q)

$M_o M_P$ is often called the *projection matrix*

The openGL projection Matix

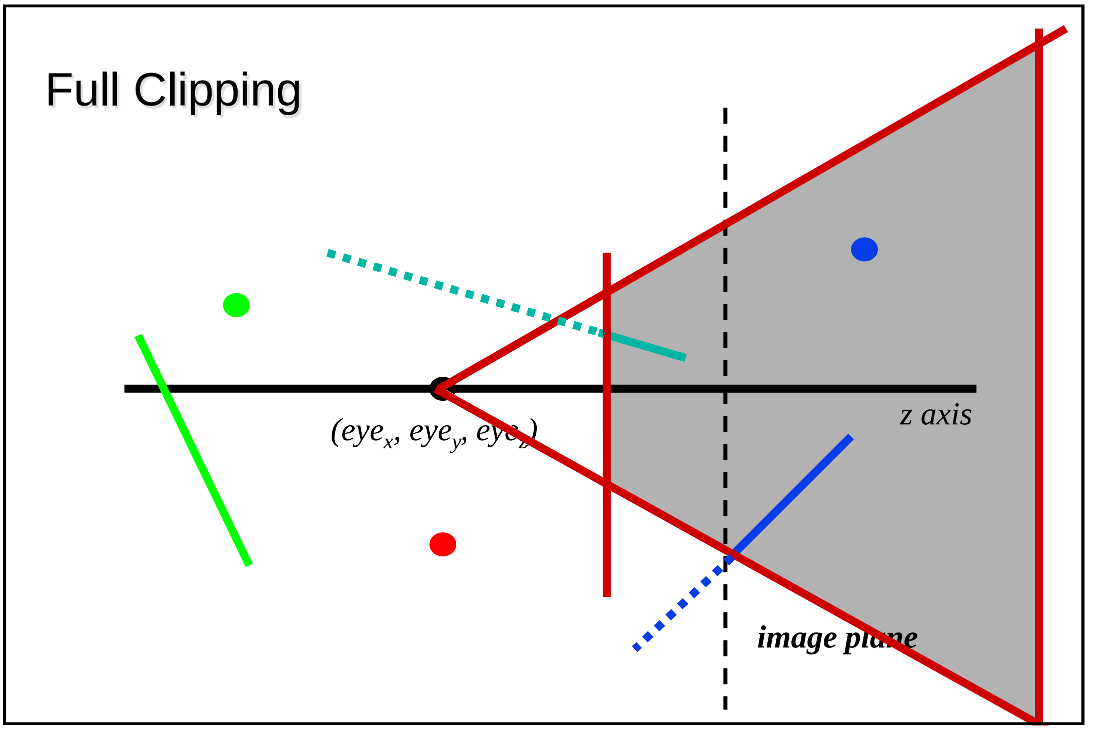
$M_o\, M_P$ is often called the *projection matrix*

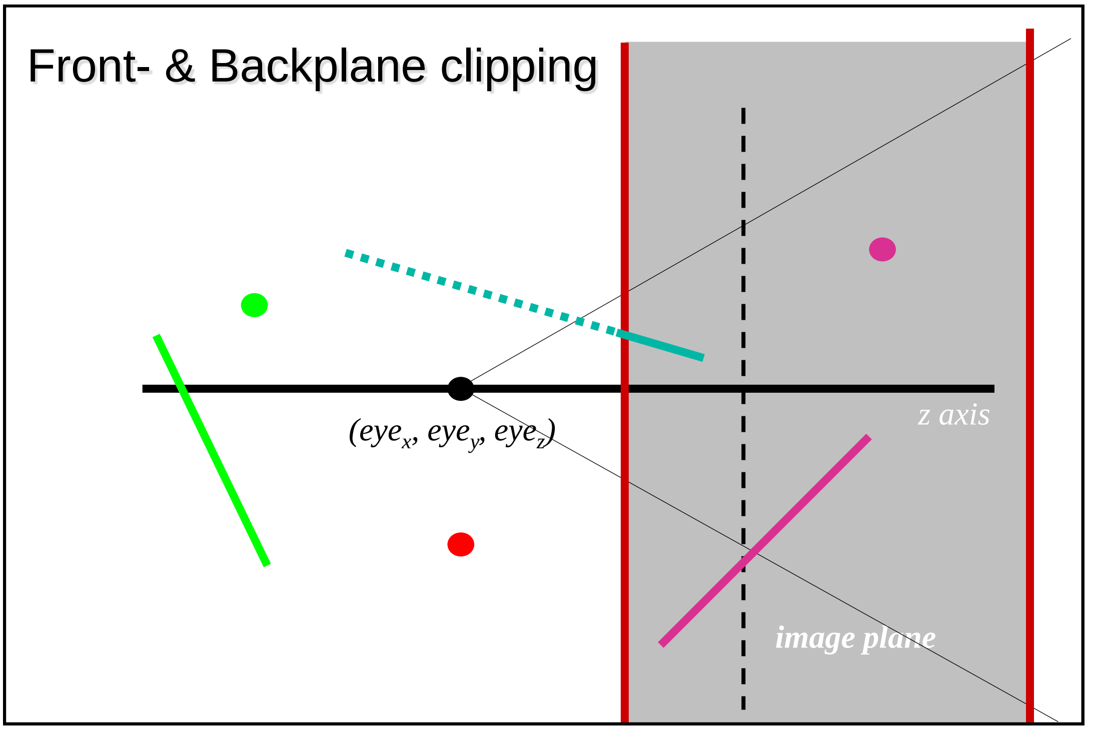
$$M_{openGL} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & \frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Graphics Pipeline

- Modeling Transformations
- Illumination (Shading)
- Viewing Transformation (Perspective / Orthographic)
- Clipping
- Projection (to Screen Space)
- Scan Conversion (Rasterization)
- Visibility / Display

Effizientes Clipping wird NICHT in einem einzelne Prozessschritt durchgeführt!


Full Clipping
(eye$_x$, eye$_y$, eye$_z$)
z axis
image plane


Front- & Backplane clipping
(eye$_x$, eye$_y$, eye$_z$)
z axis
image plane