3D Computer Graphik

Graphics Pipeline

- Modeling Transformations
- Illumination (Shading)
- Viewing Transformation (Perspective / Orthographic)
- Clipping
- Projection (to Screen Space)
- Scan Conversion (Rasterization)
- Visibility / Display

Input:

Geometrische Modelle:
Beschreibung aller Objekte, Oberflächen, Position der Lichtquellen.

Beleuchtungsmodell:
Rechenvorschriften zur Simulation der Interaktion von Materie und Licht

Blickwinkel:
Kamera oder Augenposition, "viewing frustum"

Raster Bereich
"Viewport", Pixelgrid in welches die Bildeben abgebildet wird

Output:

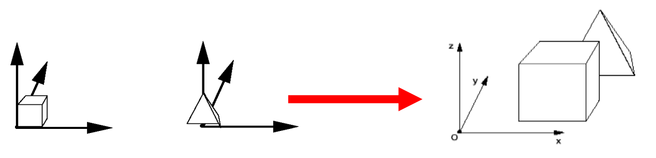
Farben / Intensitäten:
Angepasst an den Framebuffer und den Bildschirm (z.B. 24-bit RGB Werte)
.

Modeling Transformations

- **Modeling Transformations**
- Illumination (Shading)
- Viewing Transformation (Perspective / Orthographic)
- Clipping
- Projection (to Screen Space)
- Scan Conversion (Rasterization)
- Visibility / Display

3D Modelle haben eigenes Koordinatensystem (object space)

"Modeling transforms" orientieren die Modelle in einem gemeinsamen Koordinatensystem (world space)



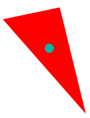
Object space World space

Geometrische

Transformationen 3D

Wiederholung: Verkettung von Transformationen in 2D

Rotation um Fixpunkt



(x_r, y_r)

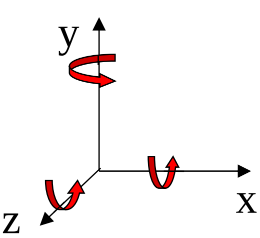
$$R(x_r, y_r, \theta) = T(x_r, y_r) \circ R(\theta) \circ T(-x_r, -y_r)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_r(1-\cos\theta) + y_r \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & y_r(1-\cos\theta) - x_r \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3D Transformationen

Rechtshändiges System:



Positive Rotation um eine Koordinatenachse:

Rotation gegen den Uhrzeigersinn, wenn man vom Positiven in die Richtung zum Ursprung schaut.

3D Translation $T(t_x,t_y,t_z)$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

3D Rotation um die *x*-, *y*-, *z*- Achse

$$R_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = R_{X,Y,Z}(\theta) \cdot P$$

$$R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3D Rotation um eine beliebige Achse

1. Verschiebe das Objekt so, dass Rotationsachse durch den Ursprung geht.

2. Rotiere das Objekt so, daß die Rotationsachse mit einer der Koordinatenachsen zusammen fällt.

3. Rotiere das Objekt um dem gewünschten Winkel.

4. Invertiere die Rotation aus Schritt 2.

5. Invertiere die Translation aus Schritt 1.

Wechsel der Koordinatensystem

Transformationen lassen sich auch als ein Wechsel der Koordinatensysteme verstehen.

Objekte in Szenen haben meist ihr eigenes Koordinatensystem, sollen aber in ein gemeinsames Weltkoordinaten-system eingebunden werden. (Beispiel: Fahrrad mit rotierenden Rädern)

Beispiel

Ein Rad rolle auf dem Boden und drehe sich dabei um den Winkel α . Wo befindet sich dann ein Punkt *P* auf dem Reifen in Weltkoordinaten?

In Radkoordinaten $P'^{(rad)} = T(r\alpha,0,0) \circ \mathrm{R}(\alpha) \cdot P^{(rad)}$

In den neuen Radkoordinaten $P'^{(rad')} = \mathrm{R}(\alpha) \cdot P^{(rad)}$

In Weltkoordinaten $P^{(welt)} = M_{welt \leftarrow rad} \cdot P^{(rad)}$

$\Rightarrow$

$$P'^{(welt)} = M_{welt \leftarrow rad} \cdot P'^{(rad)} = M_{welt \leftarrow rad} \circ T(r\alpha,0,0) \circ R(\alpha) \cdot P^{(rad)}$$

oder

$$P'^{(welt)} = M_{welt \leftarrow rad'} \cdot P'^{(rad')} = M_{welt \leftarrow rad'} \circ M_{rad' \leftarrow rad} \circ R(\alpha) \cdot P^{(rad)}$$

Freie Bewegung
von 3D Objekten im 3D Raum

Parameterisierung der Objektorientierung

Problem : Wie lässt sich die Orientierung eines Objekts beschreiben?

Das heißt, wie ist der Raum aller möglichen Orientierung zu Parameterisieren?

Oder, wie ist zwischen zwei Orientierungen zu interpolieren?

Eine Möglichkeit: Eulerwinkel, die definierte aneinander Reihung von Basisrotationen!

3D Rotationen um die *x*-, *y*-, *z*- Achsen

$$R_X(\theta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_Y(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_Z(\theta_3) = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jede beliebige Rotation lässt sich durch hintereinander Reihung von 3 Basisrotationen beschreiben.

$$R(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = R_Z(\theta_3) \circ R_Y(\theta_2) \circ R_X(\theta_1)$$

$$R(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{bmatrix} c_3 c_2 & c_2 s_3 & -s_2 & 0 \\ s_1 s_2 c_3 - c_1 s_3 & s_1 s_2 s_3 + c_1 c_3 & s_1 c_2 & 0 \\ c_1 s_2 c_3 + s_1 s_3 & c_1 s_2 s_3 - s_1 c_3 & c_1 c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit

$$c_i = \cos\theta_i \quad \text{und} \quad s_i = \sin\theta_i$$

Eulerwinkel sind unpraktisch - erster Grund!

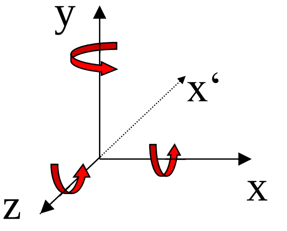
1. Es ist schwierig eine bestimmte Rotation einzustellen.

Es werden zwar die Punkte eines Objektes rotiert, aber nicht seine Koordinatenachsen!

z.B.

$$R\left(\theta_1, \frac{\pi}{2}, \theta_3\right) = R_Z(\theta_3) \circ R_Y\left(\frac{\pi}{2}\right) \circ R_X(\theta_1)$$

Hat nur zwei Freiheitsgrade!



Eulerwinkel sind unpraktisch - zweiter Grund!

2. Für Key-frame Technik nicht nutzbar!

Wie soll zwischen zwei Positionen interpoliert werden?

Es gibt viele verschiedene Wege!

Euler's Theorem

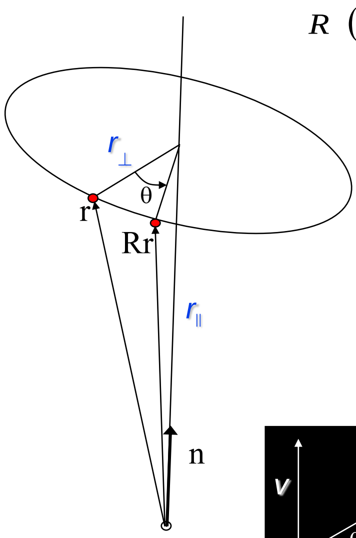
Jede beliebige Rotation $R(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ läßt sich durch eine einzige Rotation um eine Achse $\vec{n}$ beschreiben.

$$\text{d.h.}\quad \forall\,\theta_1,\theta_2,\theta_3 \quad \exists\,\theta,\vec{n}$$

$$\text{daß gilt :}\quad R(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = R(\theta,\vec{n})$$

Transformation als Funktion eines Winkels

$$R\ (\theta_1,\theta_2,\theta_3)\cdot\vec{r} = R(\theta,\vec{n})\cdot\vec{r}$$



Zerlege $\quad r = r_\parallel + r_\perp$

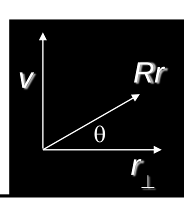
$\rightarrow r_\parallel = (n \bullet r)\, n$

$\rightarrow r_\perp = r - (n \bullet r)\, n$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{R}\,r = R\,r_\parallel + R\,r_\perp = r_\parallel + R\,r_\perp}$$

Konstruiere v in der Rotationsebene

$\rightarrow v = n \times r_\perp = n \times r$



da v, $r_\perp$, $Rr_\perp$ planar

$\Rightarrow\ \rightarrow R\ r_\perp = \cos(\theta)\ r_\perp + \sin(\theta)\, v$

Transformation als Funktion eines Winkels

$$\boxed{\mathrm{R}\, r = R\, r_{\parallel} + R\, r_{\perp} = r_{\parallel} + R\, r_{\perp}}$$

$$\mathrm{R}\, r = r_{\parallel} + R\, r_{\perp}$$

$$\mathrm{R}\, r = (n \bullet r)\, n + R\, r_{\perp}$$

$$\mathrm{R}\, r = (n \bullet r)\, n + cos(\theta)\; r_{\perp} + sin(\theta)\, v$$

$$\mathrm{R}\, r = (n \bullet r)\, n + cos(\theta)\, (r - (n \bullet r)\, n) + sin(\theta)\, v$$

$$\mathrm{R}\, r = (n \bullet r)\, n + cos(\theta)\, (r - (n \bullet r)\, n) + sin(\theta)\, (n \times r)$$

$$\boxed{\mathrm{R}\, r = cos(\theta)\, r + (1 - cos(\theta))\, n\, (r \bullet n) + sin(\theta)\, (n \times r)}$$

EINSCHUB: Mathematik Repetitorium

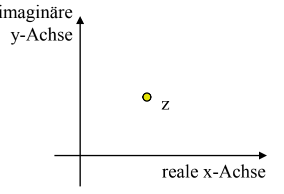
Komplexe Zahlen

Quaternionen

Komplexe Zahlen (Repetitorium)

Eine komplexe Zahl z ist ein geordnetes Paar reeller Zahlen:

$z = (x, y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$



wobei

$x = \mathrm{Re}(z)$ als Realteil von z und

$y = \mathrm{Im}(z)$ als Imaginärteil von z bezeichnet wird.

mit der Einheit (0, 1) = i

Rechenregeln :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$(x_1, y_1) \div (x_2, y_2) = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

Komplexe Zahlen (2)

Eigenschaften :

Realteil : $(1, 0)^2 = (1, 0)$

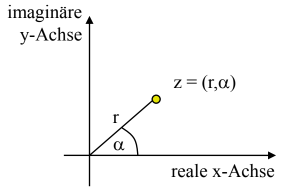
Imaginärteil : $i^2 = (0, 1)^2 = (-1, 0) \Rightarrow i = \sqrt{-1}$

$z = (x, y)$ oder $z = x + iy$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ oder $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ mit $\bar{z} = x - iy$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

Komplexe Zahlen (Polarkoordinaten)



in Polarkoordinaten

$$z = (r,\alpha) \qquad \text{oder} \qquad z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \qquad z = r\,e^{i\alpha}$$

$$\Rightarrow \qquad z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\alpha_1-\alpha_2)}$$

Quaternionen *(Hamilton 1843)*

ein Quaternion q sei

$$q = a + ib + jc + kd \qquad \text{mit} \qquad i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k = -ji$$

$$jk = i = -kj$$

$$ki = j = -ik$$

$$\bar{q} = a - ib - jc - kd$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x})$$

oder $\quad q = (s,\vec{v}) \quad = \quad s + iv_x + jv_y + kv_z$

$$q_1 + q_2 = (s_1,\vec{v}_1) + (s_2,\vec{v}_2) = (s_1 + s_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

$$q_1 \cdot q_2 = (s_1,\vec{v}_1) \cdot (s_2,\vec{v}_2) = (s_1 \cdot s_2 - \vec{v}_1\vec{v}_2 \;,\; s_1\vec{v}_2 + s_2\vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \neq q_2 \cdot q_1$$

$$|q|^2 = q \cdot \bar{q} = s^2 + |v|^2$$

Quaternionen (*Multiplikation*)

$$q_1 \cdot q_2 = (s_1, \vec{v}_1) \cdot (s_2, \vec{v}_2) =$$

$$= (s_1 + iv_{1x} + jv_{1y} + kv_{1z}) \cdot (s_2 + iv_{2x} + jv_{2y} + kv_{2z})$$

$$= (s_1) \cdot (s_2 + iv_{2x} + jv_{2y} + kv_{2z})$$
$$+ iv_{1x} \cdot (s_2 + iv_{2x} + jv_{2y} + kv_{2z})$$
$$+ jv_{1y} \cdot (s_2 + iv_{2x} + jv_{2y} + kv_{2z})$$
$$+ kv_{1z} \cdot (s_2 + iv_{2x} + jv_{2y} + kv_{2z})$$

$$= s_1 s_2 - v_{1x}v_{2x} - v_{1y}v_{2y} - v_{1z}v_{2z}$$
$$+ i\,(\underline{s_1 v_{2x}} + \underline{s_2 v_{1x}} \boxed{+ v_{1y}v_{2z} - v_{1z}v_{2y}})$$
$$+ j\,(\underline{s_1 v_{2y}} + \underline{s_2 v_{1y}} \boxed{- v_{1x}v_{2z} + v_{1z}v_{2x}})$$
$$+ k\,(\underline{s_1 v_{2z}} + \underline{s_2 v_{1z}} \boxed{+ v_{1x}v_{2y} - v_{1y}v_{2x}})$$

$$= \left(s_1 \cdot s_2 - \vec{v}_1 \vec{v}_2 \;,\; \underline{s_1 \vec{v}_2} + \underline{s_2 \vec{v}_1} \boxed{+ \vec{v}_1 \times \vec{v}_2} \right)$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$
$$ij = k = -ji$$
$$jk = i = -kj$$
$$ki = j = -ik$$

Von Quaternionen zu Rotationen

sei $\quad p = (0, \vec{r})$

und $\quad q = (s, \vec{v})$ mit $q\bar{q} = 1 \quad (\Rightarrow \quad q^{-1} = \bar{q} \;)$

definiere

$$R_q(p) = qpq^{-1} = \left(0, \left(s^2 - \vec{v} \cdot \vec{v}\right) \cdot \vec{r} \; + \; 2\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{r}) \; + \; 2s\vec{v} \times \vec{r} \right)$$

da $\quad |q| = 1 \qquad q = (\cos\theta, \; \sin\theta \; \vec{n})$

$$\Rightarrow \quad R_q(p) = \left(0, \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \cdot \vec{r} \; + \; 2\sin^2\theta \; \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r}) \; + \; 2\cos\theta \sin\theta \; \vec{n} \times \vec{r} \right)$$

$$R_q(p) = \left(0, (\cos 2\theta) \cdot \vec{r} \; + \; (1 - \cos 2\theta) \; \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r}) \; + \; \sin 2\theta \; \vec{n} \times \vec{r} \right)$$

$$\boxed{R\, r = \cos(\theta)\, r + (1 - \cos(\theta))\, n\, (r \bullet n) + \sin(\theta)\, (n \times r)}$$

Der Operator $\; q(\;)q^{-1}$ mit $\; q = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \quad \sin\frac{\theta}{2} \; \vec{n} \right)$ beschreibt eine Rotation!!

Quaternionen als Rotationen

Euler's Theorem folgt implizit aus der Quaternionenalgebra, da das Produkt von 2 Einheits Quaternionen wiederum ein Quarternion der Länge eins ist.

$$R_{q''} = R_{q'} \circ R_q \quad \text{mit} \quad q'' = q \cdot q'$$

Beispiel:

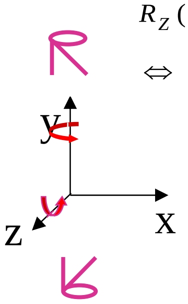
$$R_X(\pi) \quad \Leftrightarrow \quad q_x = \left(\cos\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\pi}{2}\ (1,\ 0,\ 0) \right) = (0,\ (1,\ 0,\ 0))$$

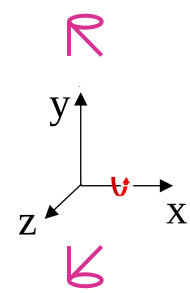
$$R_Z(\pi) \circ R_Y(\pi)$$

$$\Leftrightarrow \quad q_y \cdot q_z = (0,\ (0,\ 1,\ 0)) \cdot (0,\ (0,\ 0,\ 1))$$

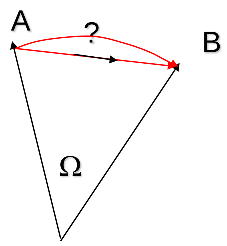
$$= (0,\ (0,\ 1,\ 0) \times (0,\ 0,\ 1))$$

$$= (0,\ (1,\ 0,\ 0))$$





Interpolation von Quaternionen



$$P = \alpha A + \beta B$$

1. Lineare Interpolation im Quaternionenraum $\quad q(t) = t q_B + (1-t) q_A$

2. Lineare Interpolation im Quaternionenraum mit |P|=1

$$A \cdot B = \cos\Omega \quad \text{und} \quad A \cdot P = \cos\Theta \quad \Rightarrow \quad P = A\frac{\sin(\Omega - \Theta)}{\sin\Omega} + B\frac{\sin\Theta}{\sin\Omega}$$

Spherische Interpolation zwischen q_A, q_B mit $q_A \cdot q_B = \cos\Omega$

$$\boxed{q(t) = q_A \frac{\sin((1-t)\Omega)}{\sin\Omega} + q_B \frac{\sin \Omega \mathbf{t}}{\sin\Omega}}$$

Quaternion zu Rotationsmatrix

Sei q eine Einheits-Quaternion mit $q = (\mathrm{s}, \vec{\mathrm{v}})$ und $q\overline{q} = 1$

dann berechnet sich die entsprechende Rotationsmatrix R zu

$$R\ (q) = \begin{bmatrix} 1-2\left(v_y^2+v_z^2\right) & 2\left(v_x v_y - s v_z\right) & 2\left(v_x v_z + s v_y\right) & 0 \\ 2\left(v_x v_y + s v_z\right) & 1-2\left(v_x^2+v_z^2\right) & 2\left(v_y v_z - s v_x\right) & 0 \\ 2\left(v_x v_z - s v_y\right) & 2\left(v_y v_z + s v_x\right) & 1-2\left(v_x^2+v_y^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$