

Projektionen

wie schon immer ...

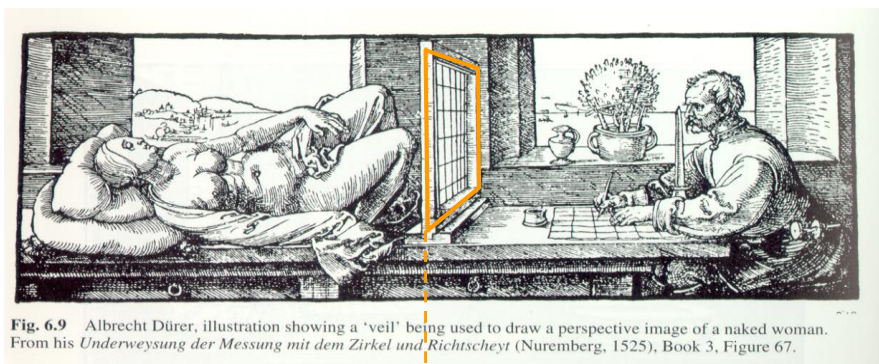
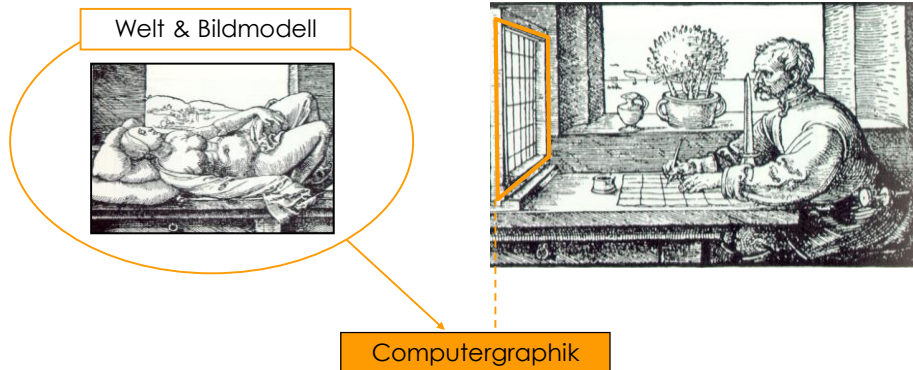


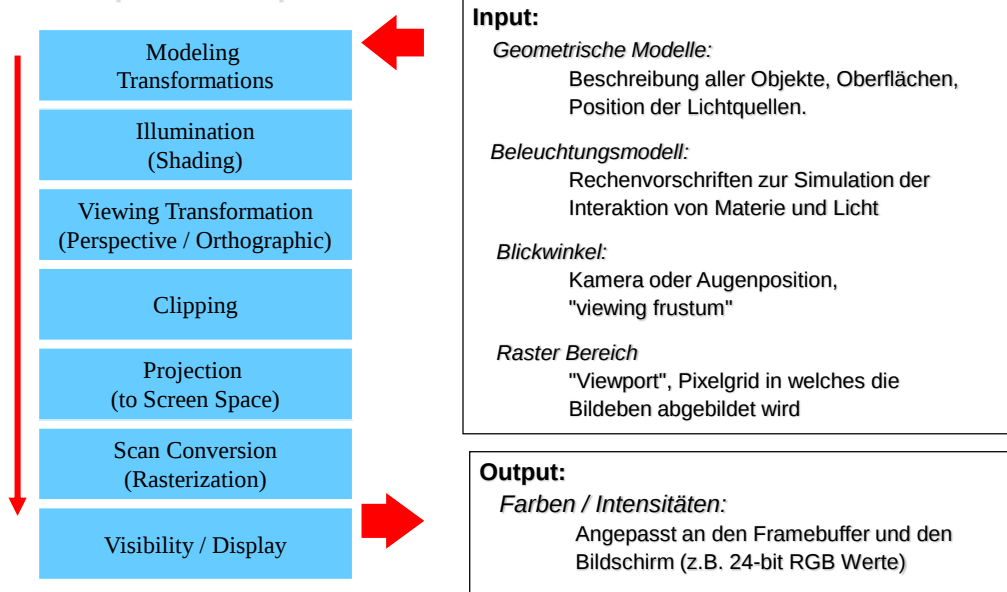
Fig. 6.9 Albrecht Dürer, illustration showing a 'veil' being used to draw a perspective image of a naked woman. From his *Unterweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit* (Nuremberg, 1525), Book 3, Figure 67.

Computergraphik

Bilderzeugung ?



Graphics Pipeline

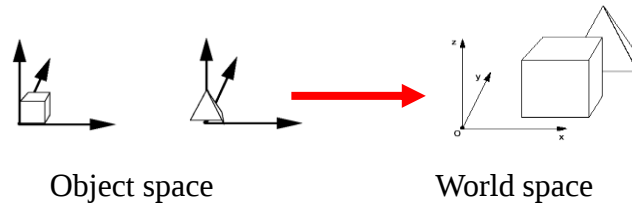


Modeling Transformations

Modeling Transformations
Illumination (Shading)
Viewing Transformation (Perspective / Orthographic)
Clipping
Projection (to Screen Space)
Scan Conversion (Rasterization)
Visibility / Display

3D Modelle haben eigenes Koordinatensystem (object space)

"Modeling transforms" orientieren die Modelle in einem gemeinsamen Koordinatensystem (world space)



Perspektivische Projektion 3D => 2D

Viewing Transformation

Modeling
Transformations

Illumination
(Shading)

Viewing Transformation
(Perspective / Orthographic)

Clipping

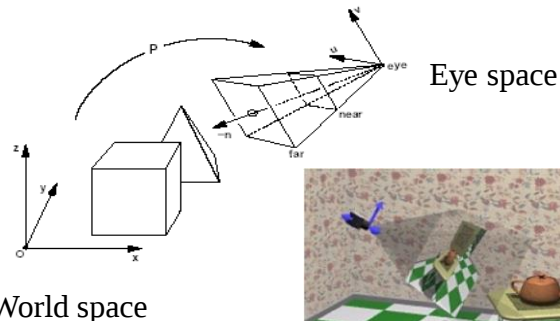
Projection
(to Screen Space)

Scan Conversion
(Rasterization)

Visibility / Display

Abbildung der Weltkoordinaten in Kamerakoordinaten.

Blickrichtung wird i.a. in den Ursprung und entlang einer Koordinatenachse gewählt.

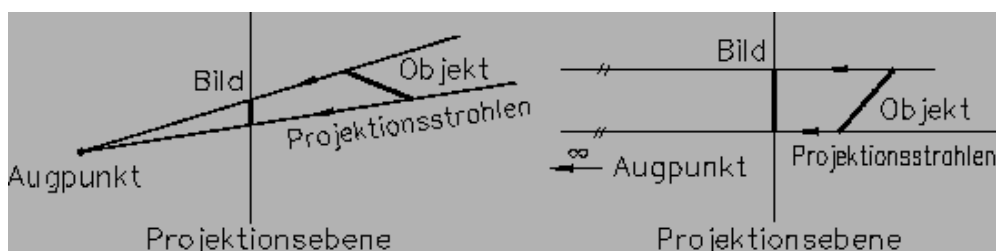


Betrachten dreidimensionaler Szenen

Ebene geometrische Projektionen: Der Wechsel von 3D Koordinaten zu 2D Bildschirmkoordinaten!

perspektivisch

parallel



Der Unterschied zwischen parallel und perspektivischer Projektionen liegt im Abstand des Projektionszentrums (Augpunkt) zur Projektionsebene und zum Objekt.

Parameter einer 3D-Ansicht.

Bild-, Projektions-ebene	(viewing plane VP)
Blickpunkt	(view reference point VRP)
Normale der Bildebene	(viewing plane normal VPN)
Abstand der Bildebene zum Augpunkt	(viewing plane distance VPD)
Oben Richtung	(viewing up VUP)
Bildschirmmitte	(center of window CW)
Projektionsrichtung	(direction of projection DOP)
Augpunkt	(projection reference point PRP)
Vordere und hinter Clippingebene	(front and back plane FP BP)

Betrachten dreidimensionaler Szenen (3)

Die Parallel- als auch die perspektivische Projektion werden in viele Projektionstypen aufgespalten.

Parallelprojektionen

Rechtwinklig:

Haupttriss

Axionometrische: iso-, di-
tri-metrische

Schiefwinklig: Kavalier, Kabinett

Perspektivische Projektionen

1 Punkt , 2Punkt, 3Punkt

Homogene Koordinaten 2D

2D Kartesische Koordinaten $\rightarrow$ Homogene Koordinaten

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \end{bmatrix},$$

wobei $\begin{bmatrix} x \\ y \\ h \end{bmatrix}$ und $k * \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \end{bmatrix}$

den selben Punkt $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ beschreiben.

Perspektivische Projektion

Projektion von 3D-Koordinaten zu 2D Bildschirmkoordinaten!

Annahmen:

Augpunkt auf der z-Achse $(0,0,z_{pz})$

Projektionsebene $\perp$ z-Achse

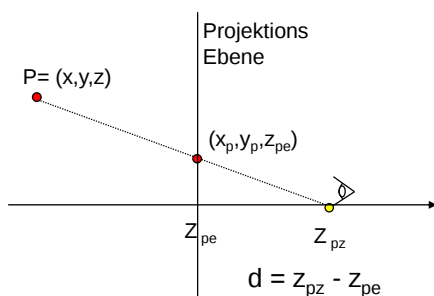
Strahlensatz:

$$\frac{x_p}{x} = \frac{z_{pz} - z_{pe}}{z_{pz} - z}$$

$$\Rightarrow x_p = x \left(\frac{z_{pz} - z_{pe}}{z_{pz} - z} \right) = x \left(\frac{d}{z_{pz} - z} \right)$$

$$y_p = y \left(\frac{z_{pz} - z_{pe}}{z_{pz} - z} \right) = y \left(\frac{d}{z_{pz} - z} \right)$$

$$z_p = z_{pe} \quad \forall z$$



Perspektivische Projektion

Homogenen Koordinaten

$$\begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ h \end{bmatrix} = h \cdot \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_{pe} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{\text{perspektiv}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_{pe} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{z_{pz} - z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{z_{pz} - z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{z_{pe}}{z_{pz} - z} & z_{pe} \left(\frac{z_{pz}}{z_{pz} - z} \right) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{z_{pz} - z} & \frac{z_{pz}}{z_{pz} - z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Perspektivische Projektion

Homogenen Koordinaten

$$\begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ h \end{bmatrix} = h \cdot \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_{pe} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{\text{perspektiv}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{mit } h = \frac{z_{pz} - z}{d} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{z_{pe}}{d} & z_{pe} \left(\frac{z_{pz}}{d} \right) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} & \frac{z_{pz}}{d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Perspektivische Projektion (Sonderfall 1)

Bisherige Annahmen: Augpunkt auf der z-Achse $(0,0,z_{pz})$, Projektionsebene $\perp$ z-Achse

$$M_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{z_{pe}}{d} & z_{pe} \left(\frac{z_{pz}}{d} \right) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} & \frac{z_{pz}}{d} \end{bmatrix}$$

A) mit $z_{pz} = 0$ und $z_{pe} = -d'$ $\Rightarrow d = d'$ und $h = \frac{z}{d'}$

$$\Rightarrow M'_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d'} & 0 \end{bmatrix}$$

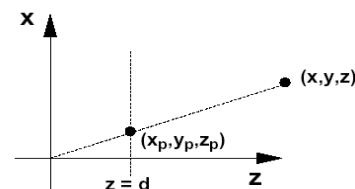
Perspektivische Projektion

Projiziere alle Punkte entlang der z-Achse auf die $z = d$ Ebene, Augpunkt im Ursprung

$$x_p = \frac{d \cdot x}{z} = \frac{x}{z/d}$$

$$y_p = \frac{d \cdot y}{z} = \frac{y}{z/d}$$

$$z_p = d$$



homogenize

$$\begin{pmatrix} x \cdot d / z \\ y \cdot d / z \\ d \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z / d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Perspektivische Projektion (Sonderfall 2)

Bisherige Annahmen: Augpunkt auf der z-Achse $(0,0,z_{pz})$, Projektionsebene $\perp$ z-Achse

$$M_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{z_{pe}}{d} & z_{pe}\left(\frac{z_{pz}}{d}\right) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} & \frac{z_{pz}}{d} \end{bmatrix}$$

B) mit $z_{pz} = -d'$ und $z_{pe} = 0 \Rightarrow d = -d'$ und $h = \frac{d'+z}{d'}$

$$\Rightarrow M'_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d'} & 1 \end{bmatrix}$$

Grenzübergang, $d \rightarrow \infty$

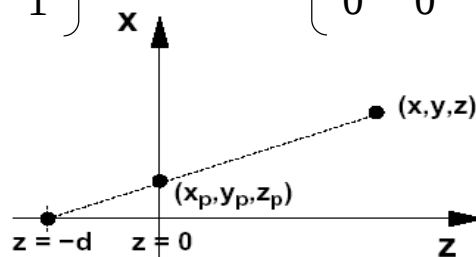
diese perspektivische
Projektionsmatrix...

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$

...ist eine
orthographische Projektion

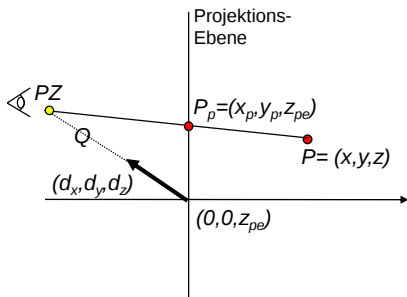
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Perspektivische Projektion (allgemein)

Annahmen:

Projektionsebene $\perp$ z-Achse
~~Augpunkt auf der z-Achse $(0,0,z_{pz})$~~



P_p liegt auf der Strecke S zwischen PZ und P

$$PZ + t(P - PZ), \quad 0 \leq t \leq 1$$

mit $PZ = (0,0,z_{pe}) + Q(d_x, d_y, d_z)$

folgt für einen Punkt $P' = (x', y', z')$ auf S .

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Qd_x \\ Qd_y \\ z_{pe} + Qd_z \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} x - Qd_x \\ y - Qd_y \\ z - (z_{pe} + Qd_z) \end{bmatrix}$$

löse die Gleichungen für $z' = z_{pe} = z_p$

nach t , $x' = x_p$ und $y' = y_p$

Perspektivische Projektion (allgemein)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Qd_x \\ Qd_y \\ z_p + Qd_z \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} x - Qd_x \\ y - Qd_y \\ z - (z_p + Qd_z) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$(2)$$

$$(3)$$

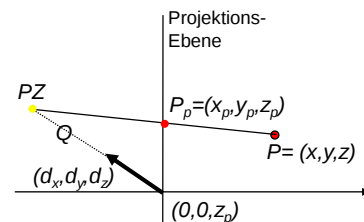
für $z' = z_p$

$$(3) \Rightarrow t = \frac{z_p - (z_p + Qd_z)}{z - (z_p + Qd_z)}$$

$$(3) \text{ in } (1) \quad x_p = \frac{x - z \frac{d_x}{d_z} + z_p \frac{d_x}{d_z}}{\frac{z_p - z}{Qd_z} + 1},$$

(3) in (2)

$$y_p = \frac{y - z \frac{d_y}{d_z} + z_p \frac{d_y}{d_z}}{\frac{z_p - z}{Qd_z} + 1}$$



Perspektivische Projektion (allgemein)

$$x_p = \frac{x - z \frac{d_x}{d_z} + z_p \frac{d_x}{d_z}}{\frac{z_p - z}{Qd_z} + 1},$$

$$h = \frac{1}{\frac{z_p - z}{Qd_z} + 1}$$

$$y_p = \frac{y - z \frac{d_y}{d_z} + z_p \frac{d_y}{d_z}}{\frac{z_p - z}{Qd_z} + 1}$$

$$z_p = z_p \frac{\frac{z_p - z}{Qd_z} + 1}{\frac{z_p - z}{Qd_z} + 1}$$

$$M_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{d_x}{d_z} & z_p \frac{d_x}{d_z} \\ 0 & 1 & -\frac{d_y}{d_z} & z_p \frac{d_y}{d_z} \\ 0 & 0 & -\frac{z_p}{Qd_z} & \frac{z_p^2}{Qd_z} + z_p \\ 0 & 0 & -\frac{1}{Qd_z} & \frac{z_p}{Qd_z} + 1 \end{bmatrix}$$

Perspektivische Projektion (allgemein)

$$M_{allgemein} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{d_x}{d_z} & z_p \frac{d_x}{d_z} \\ 0 & 1 & -\frac{d_y}{d_z} & z_p \frac{d_y}{d_z} \\ 0 & 0 & -\frac{z_p}{Qd_z} & \frac{z_p^2}{Qd_z} + z_p \\ 0 & 0 & -\frac{1}{Qd_z} & \frac{z_p}{Qd_z} + 1 \end{bmatrix}$$

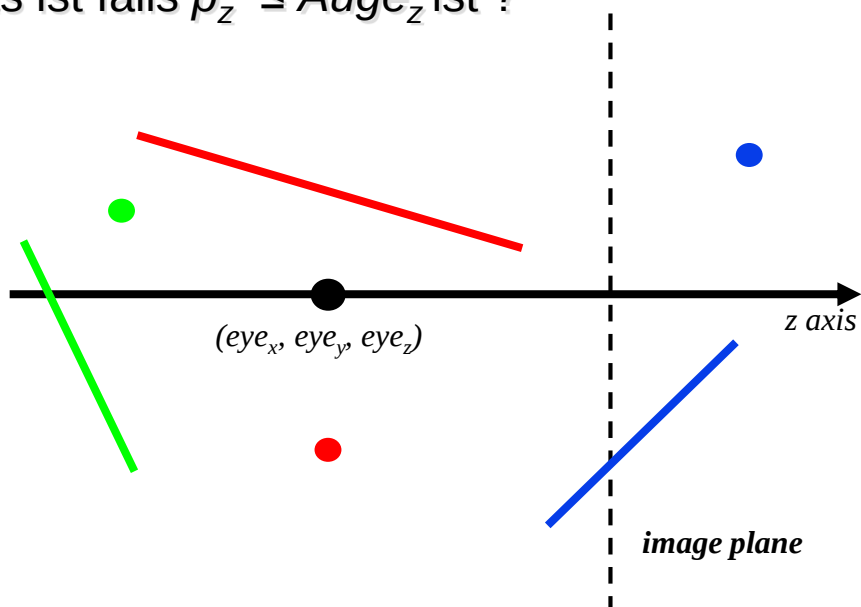
	z_p	Q	$[d_x \ d_y \ d_z]$
M_{ort}	0	∞	$[0 \ 0 \ -1]$
M_{per}	d	d	$[0 \ 0 \ -1]$
M'_{per}	0	d	$[0 \ 0 \ -1]$

Parallel Projection

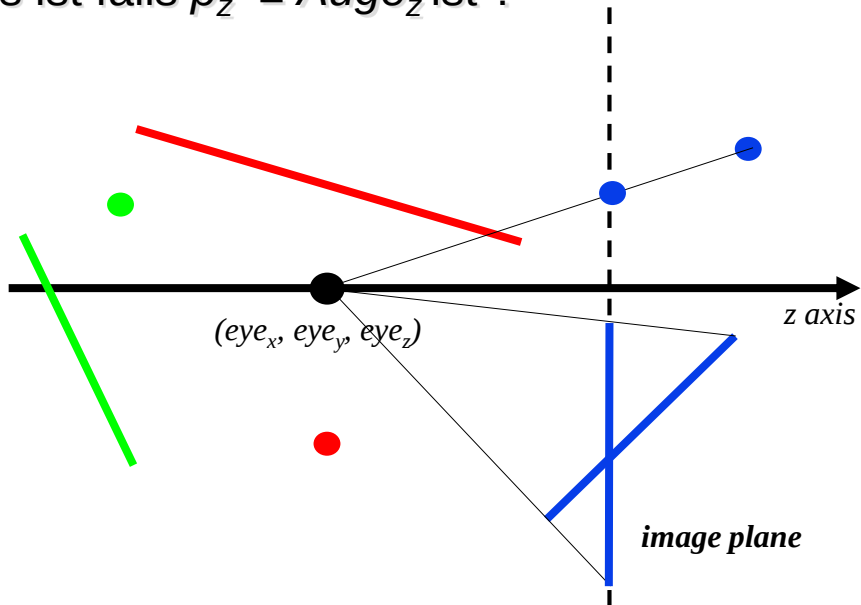
$$M_{\text{allgemein}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{d_x}{d_z} & z_p \frac{d_x}{d_z} \\ 0 & 1 & -\frac{d_y}{d_z} & z_p \frac{d_y}{d_z} \\ 0 & 0 & -\frac{z_p}{Qd_z} & \frac{z_p^2}{Qd_z} + z_p \\ 0 & 0 & -\frac{1}{Qd_z} & \frac{z_p}{Qd_z} + 1 \end{bmatrix}$$

	z_p	Q	$[d_x \quad d_y \quad d_z]$
<i>Cavalier</i>	0	∞	$[\cos\alpha \quad \sin\alpha \quad -1]$
<i>Cabinet</i>	0	∞	$[\frac{\cos\alpha}{2} \quad \frac{\sin\alpha}{2} \quad -1]$

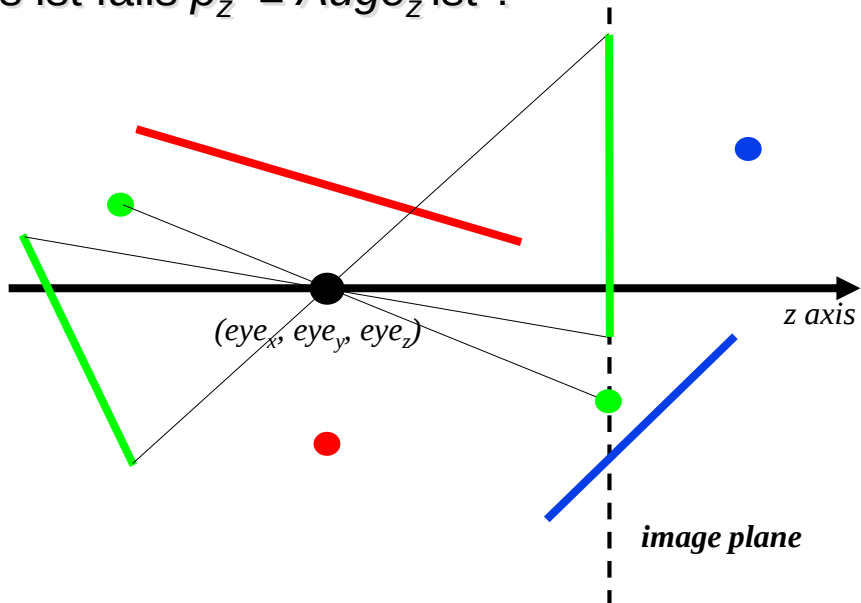
Was ist falls $p_z \leq \text{Auge}_z$ ist ?



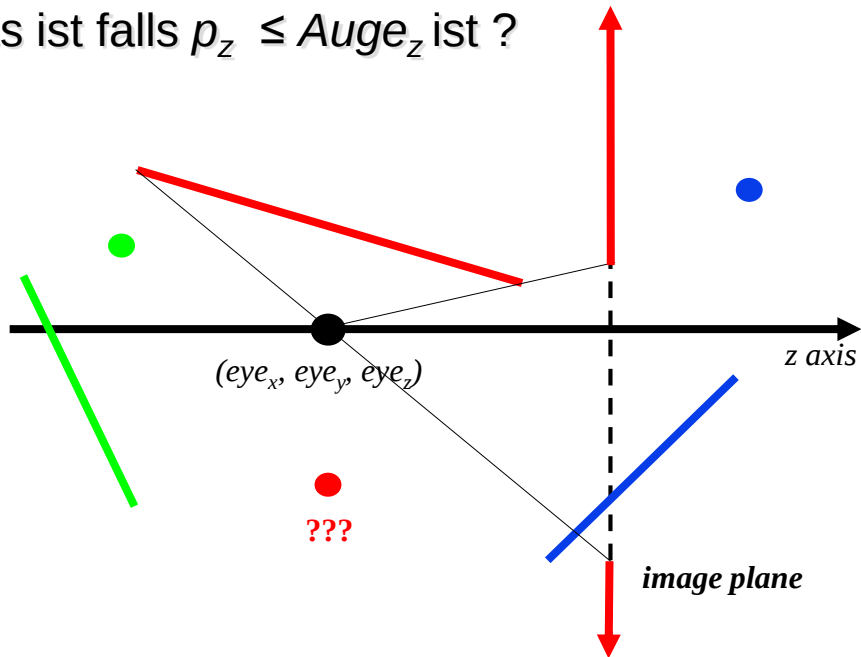
Was ist falls $p_z \leq \text{Auge}_z$ ist ?



Was ist falls $p_z \leq \text{Auge}_z$ ist ?

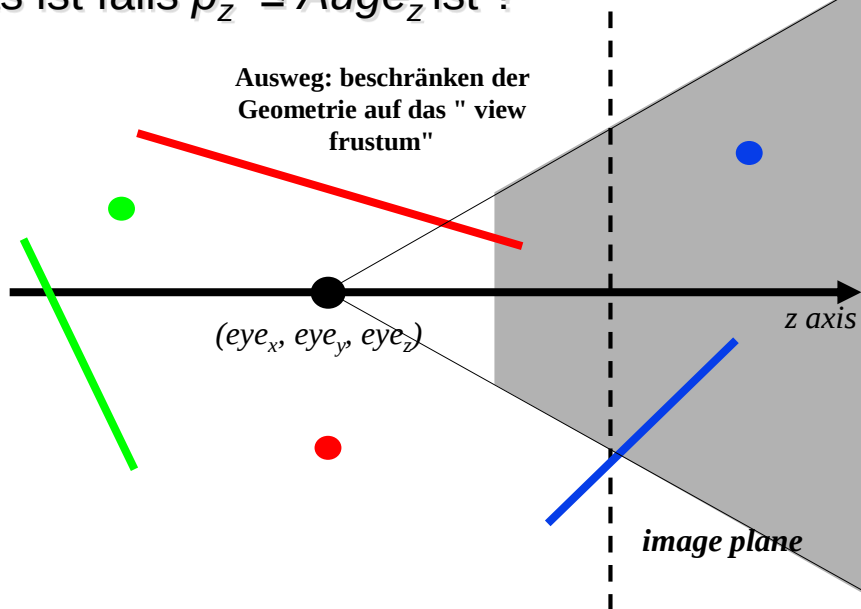


Was ist falls $p_z \leq \text{Auge}_z$ ist ?

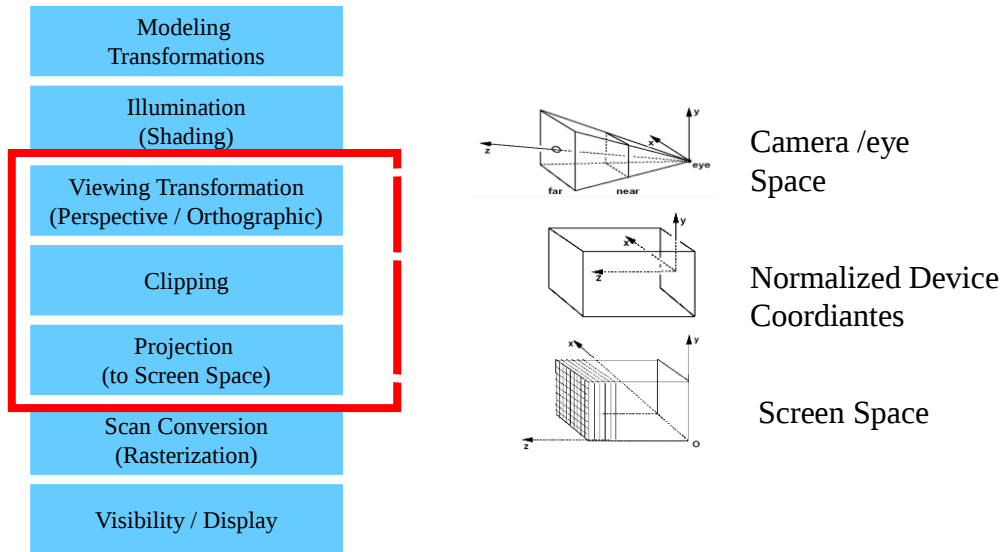


Was ist falls $p_z \leq \text{Auge}_z$ ist ?

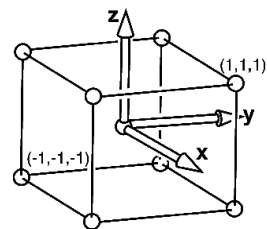
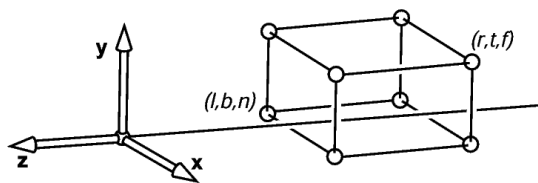
Ausweg: beschränken der
Geometrie auf das "view
frustum"



Projektionen der "pipeline"?



Normalizing the Viewing Volume



Orthographic viewing volume:

$x = l :=$ left plane

$x = r :=$ right plane

$y = b :=$ bottom plane

$y = t :=$ top plane

$z = n :=$ near plane

$z = f :=$ far plane

$$\begin{bmatrix} x_{normalized} \\ y_{normalized} \\ z_{normalized} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{n-f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{l+r}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b+t}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n+f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Orthographic Projection

$$\begin{bmatrix} x_{pixel} \\ y_{pixel} \\ z_{normalized} \\ 1 \end{bmatrix} = [M_{screen}] \cdot \begin{bmatrix} x_{normalized} \\ y_{normalized} \\ z_{normalized} \\ 1 \end{bmatrix} = [M_o] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

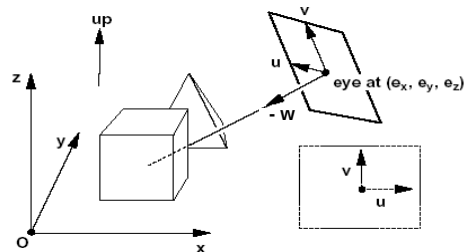
$$\begin{bmatrix} x_{pixel} \\ y_{pixel} \\ z_{normalized} \\ 1 \end{bmatrix} = [M_{screen}] \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{r-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{r-f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{l+r}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b+t}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n+f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{pixel} \\ y_{pixel} \\ z_{normalized} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n_x}{2} & 0 & 0 & \frac{n_x-1}{2} \\ 0 & \frac{n_y}{2} & 0 & \frac{n_y-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{r-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{r-f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{l+r}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b+t}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n+f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Viewing Transformation

Welt Koordinaten → Kamera koordinaten

Positionieren der Kamera



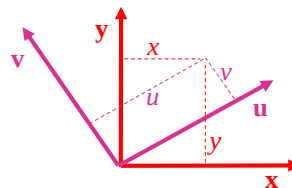
Translation + Änderung der orthonormal Basis

Gegeben:

Koordinaten **xyz** & **uvm**,
und der Punkt **p** = (x,y,z)

Finde:

p = (u,v,w)



Viewing Transformation

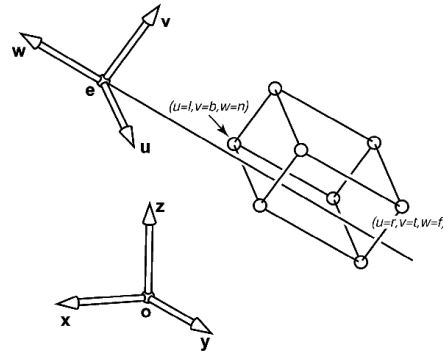
Positionieren der Kamera

Gegeben:

Koordinaten **xyz** & **uvw, e**
und der Punkt **p = (x,y,z)**

Finde:

p = (u,v,w)



$$M_v = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ w_x & w_y & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e_x \\ 0 & 1 & 0 & -e_y \\ 0 & 0 & 1 & -e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Full orthographic projection pipeline

compute: M_v

compute: M_o

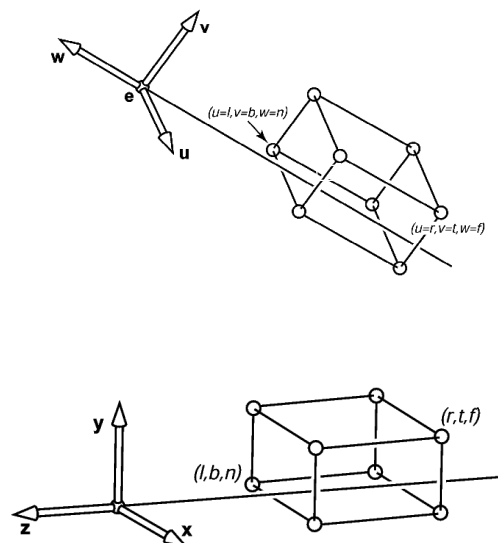
$M = M_o M_v$

For each line segment (a_i, b_i) **do**

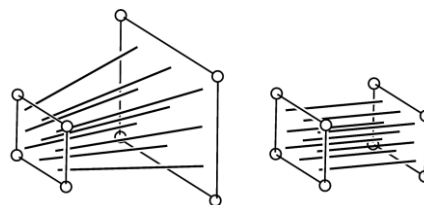
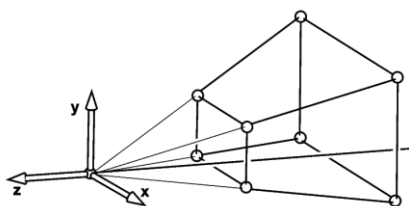
$p = M a_i$

$q = M b_i$

draw line (x_p, y_p, x_q, y_q)



Perspective Projection



$$\begin{bmatrix} h \cdot x' \\ h \cdot y' \\ h \cdot z' \\ h \end{bmatrix} = [M_p] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+f}{n} & -f \\ 0 & 0 & \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix}$$

Full perspective projection pipeline

compute: M_v

compute: M_o

compute: M_p

$$M = M_o M_p M_v$$

For each line segment (a_i, b_i) **do**

$$p = M a_i$$

$$q = M b_i$$

draw-line $(x_p/h_p, y_p/h_p, x_q/h_q, y_q/h_q)$

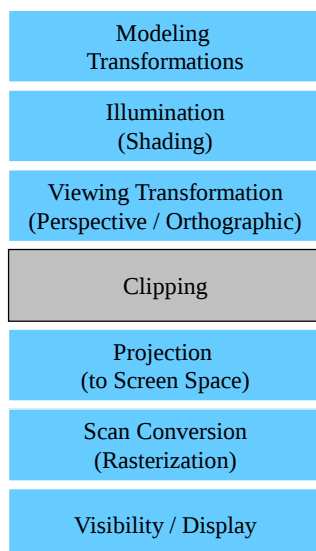
$M_o M_p$ is often called the *projection matrix*

The OpenGL projection Matix

$M_o M_p$ is often called the *projection matrix*

$$M_{\text{openGL}} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & \frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Graphics Pipeline



Effizientes Clipping wird NICHT in einem einzelnen Prozessschritt durchgeführt!

Full Clipping

The diagram illustrates the Full Clipping process in a 2D coordinate system. A viewing frustum is defined by a black line (z-axis) and two red lines (image plane boundaries). A gray shaded region represents the image plane. A green line segment is shown being clipped by the image plane. A red dot marks the eye position, labeled (eye_x, eye_y, eye_z) . A blue dot marks the image plane intersection. A dashed vertical line indicates the image plane. A red line segment is shown being clipped by the image plane. A green line segment is shown being clipped by the image plane.

Front- & Backplane clipping

The diagram illustrates the process of front- and backplane clipping in a 3D coordinate system. A horizontal black line represents the *z axis*. A vertical dashed line represents the *image plane*. A point on the *z axis* is labeled (eye_x, eye_y, eye_z) . A green line segment is shown on the left, and a red line segment is shown on the right. A blue dashed line segment connects the eye point to the red line segment. A green dot is located near the eye point, and a red dot is located near the red line segment. The background is divided into a light gray region (front plane) and a dark gray region (back plane) by the *image plane*.

40

Tiefenspeicher (*z-buffer algorithm 1974*)

Für jeden Rasterpunkt x,y wird zusätzlich, außer dem Bildspeicher $B(x,y)$ der die Farbintensitäten i speichert, noch ein Tiefenspeicher $T(x,y)$ für $z(x,y)$ angelegt (16 - 32 bit).

1.) Initialisieren: für alle x,y

$B(x,y)$ = Hintergrundfarbe

$T(x,y) = Z_{max}$ (maximal vom Beobachter entfernt).

2.) Alle Objekte *rendern* (rasteren, scanline-konvertieren)

$z(x,y)$ berechnen;

nur falls $z(x,y) < T(x,y)$

$\implies T(x,y) = z(x,y)$ und $B(x,y) = i(x,y)$



Wolfgang Strasser, in seiner Habilitationsschrift (1974) erster Hinweis auf Z-buffer Methodik.