Vorkurs Mathematik

26. – 30. August 2024

Florian Lanz, Noe Manzoni, Dominik Nowak,
Carina Santos, Remo von Rickenbach

UNI
BASEL

Skript geschrieben von Sebastian Knüsli und Christian Stohrer,
ergänzt und verbessert von Manuela Utzinger, Dennis Tröndle,
Jet Hoe Tang und Carina Santos.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

"In mathematics you don't understand things. You just get used to them."
John von Neumann

Ein schwieriges Fach, diese Mathematik. Selbst anerkannten Grössen solche Zeilen wie oben abringend, erstaunt es kaum, dass sie dem Normalsterblichen Respekt, wenn nicht gar Furcht einflösst. Diese Sachen abzubauen, diese Gewöhnung an die Mathematik zu fördern, sind die Ziele dieses Kurses. Wir haben ihn nicht geschrieben um dem ambitionierten Primus einen Haufen neuer Erkenntnisse zu präsentieren. Die behandelten Gegenstände sind das, was ein/e Maturand/in nach unserem Ermessen in der Schule kennengelernt haben sollte. Wir haben den Kurs geschrieben im Gedanken an Leute, die vielleicht keine guten Erinnerungen an die Schulmathematik haben, die Mühe hatten und sich jetzt trotzdem, vielleicht sogar nach ein, zwei Jahren Mathe-Abstinenz, an ein naturwissenschaftliches Studium wagen, was wir toll finden. Diese Leute auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen, Lücken aufzuzeigen und vielleicht auszufüllen, Furcht zu nehmen, auf dass an der Uni unbeschwerter losgelegt werden kann, ist unser Ziel. Manches wird altbekannt und einfach erscheinen, anderes ist vielleicht ganz neu. Wie das dem Kurs zugrundeliegende Skript. Orientiert haben wir uns an den Unterlagen der bisherigen Vorkurse, die von Jonas Budmiger, Jan Draisma und Johannes Lieberherr verfasst wurden. Wir danken ihnen für das zur Verfügung stellen ihres Materials, welches uns eine grosse Hilfe beim Auf-die-Beine-stellen des Kurses war. Der, wenn er seinen Zweck erfüllt, den ersten Satz des Zitats ein wenig widerlegt.

Basel, 8. September 2008 Sebastian Knüsli und Christian Stohrer

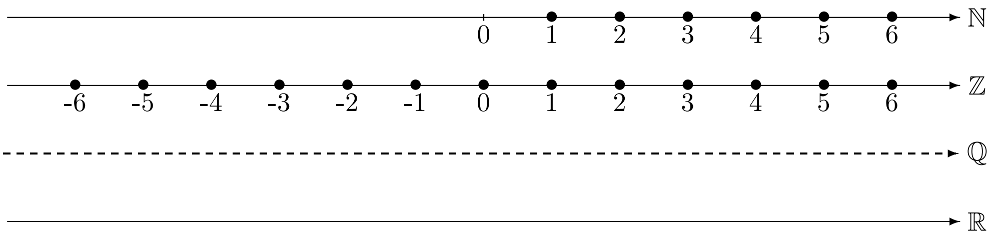
Die Idee und der Aufbau des Kurses sind die gleichen wie im letzten Jahr. Das Skript haben wir jedoch einer Kur unterzogen um es von den Kinderkrankheiten, die es bei seiner letztjährigen Erstverwendung hatte, so gut wie möglich zu befreien. Namentlich verbesserten wir Druck- und andere Fehler, versuchten Ungereimtheiten in der Notation zu beseitigen, erneuerten die Plots zur besseren Lesbarkeit und gaben dem Übungsteil ein einheitlicheres Gewand. Mit der Hoffnung, dadurch dem Zweck des Kurses gerechter zu werden, wünschen wir den Studienanfängern, an welche sich dieses Skript richtet, einen erfolgreichen Start an der hiesigen Alma Mater.

Basel, 5. August 2009 Sebastian Knüsli und Christian Stohrer

2 Basics

Zahlbereiche

Was für Arten von Zahlen kennen wir?



- Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
  In ihnen funktionieren $+$ und $\cdot$.
- Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
  In ihnen funktionieren $+$, $\cdot$ und $-$.
- Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$
  In ihnen funktionieren $+$, $\cdot$, $-$ und $:$ dazu!

  Aber **ACHTUNG**! Division durch 0 ist verboten!

  Man kann zeigen, dass nicht alle Zahlen auf der Zahlengerade rationale Zahlen sind. Darum brauchen wir noch
- Reelle Zahlen: $\mathbb{R} =$ "Die ganze Zahlengerade"
  In ihnen funktionieren $+$, $\cdot$, $-$, $:$ und man kann Wurzeln ziehen (was man in $\mathbb{Q}$ a priori nicht kann, z.B. ist $\sqrt{2}$ nicht in $\mathbb{Q}$) und man findet verrückte Zahlen wie das Verhältnis zwischen Kreisumfang und Kreisdurchmesser, π, oder e, die Eulersche Zahl, die man in $\mathbb{Q}$ vergebens sucht.

  Aber **ACHTUNG**! Wurzelziehen aus negativen Zahlen ist in $\mathbb{R}$ nicht erlaubt!

Grundgesetze

Rufen wir uns einige Grundgesetze in Erinnerung:

- Kommutativität: $a + b = b + a \qquad ab = ba$
- Assoziativität: $(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (ab)c = a(bc)$
- Distributivität: $a(b + c) = ab + ac \qquad (a + b)c = ac + bc$

Potenzgesetze:

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{n+m} \\ a^m b^m &= (ab)^m \\ (a^m)^n &= a^{m \cdot n} \\ a^{\frac{1}{m}} &= \sqrt[m]{a} \\ a^{-m} &= \frac{1}{a^m} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \frac{a^m}{b^m} \end{aligned}$$

Binomische Formeln:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

3 Lösen von Gleichungen

Einfache Gleichung

Wir beginnen mit einer simplen Gleichung. Dafür seien m und b zwei reelle Zahlen. Wir setzen zudem voraus, dass $m \neq 0$ ist:

$$mx + b = 0.$$

Gesucht ist x. Wir dürfen die Gleichung umformen, indem wir auf beiden Seiten der Gleichung immer die selbe Zahl addieren/subtrahieren/multplizieren/dividieren, bis x alleine dasteht:

$$\begin{aligned} mx + b &= 0 && \mid -b \\ mx &= -b && \mid : m \\ x &= -\frac{b}{m} \end{aligned}$$

Quadratische Gleichung

Bei einer allgemeinen quadratischen Gleichung haben wir drei Parameter a, b und c:

$$ax^2 + bx + c \;=\; 0.$$

Um eine Lösungsformel herleiten zu können, setzen wir voraus, dass einerseits $a \neq 0$ und $b^2 - 4ac \geq 0$ gilt. Damit hat die obige Gleichung zwei Lösungen x_1, x_2, gegeben durch die Formel

$$x_{1,2} \;=\; \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Vieta

Wenn $a \;=\; 1$ und die Lösungen ganzzahlig sind, kann man sie leicht selbst ersehen: Seien m und n die Lösungen. Dann muss

$$x^2 + bx + c \;=\; (x - m)(x - n) \;=\; x^2 - (m + n)x + mn$$

sein. Also gilt der

Satz von Vieta. *Seien m, n Lösungen von $x^2 + bx + c \;=\; 0$. Dann ist*

$$\begin{aligned} b &= -(m + n) \\ c &= mn. \end{aligned}$$

Beispiel. Wir wollen $x^2 + x - 12 \;=\; 0$ lösen. Zuerst zerlegen wir -12 in Faktoren. Möglich sind:

$$\pm(1, -12),\ \pm(2, -6) \text{ und } \pm(3, -4).$$

Dann kontrollieren wir, ob die negative Summe einer Kombination 1 ergibt und werden mit $(3, -4)$ fündig.

$$\text{Test:} \qquad (x - (-4))(x - 3) \;=\; x^2 + x - 12 \qquad \checkmark$$

Einfache Gleichungssysteme

Wir wollen eine gemeinsame Lösung der Gleichungen

$$2x + 3y \;=\; 5, \tag{1}$$
$$x + 2y \;=\; 4, \tag{2}$$

finden. Dafür kennen wir drei Verfahren:

Einsetzungsverfahren

Man löst eine Gleichung nach einer Variablen auf und setzt diese in die andere Gleichung ein: Im obigen Beispiel lösen wir zum Beispiel (2) nach x auf,

$$x + 2y \;=\; 4 \;\Rightarrow\; x \;=\; 4 - 2y,$$

und setzen dies in (1) ein. Wir erhalten damit

$$2(4 - 2y) + 3y \;=\; 5 \;\Rightarrow\; y \;=\; 3$$

und nach Einsetzen von y in eine der ursprünglichen Gleichungen erhalten wir $x \;=\; -2$.

Bemerkung. Man kann genauso gut die Gleichung (1) nach einer der Variablen x oder y auflösen und in (2) einsetzen. Die Lösung ist dieselbe!

Gleichsetzungsverfahren

Wir formen die Gleichungen so um, dass bei beiden auf einer Seite dasselbe steht und setzen dies gleich:

- Die Gleichung (1) machen wir zu $2x \;=\; 5 - 3y$.
- Die Gleichung (2) multiplizieren wir mit 2 und erhalten $2x + 4y \;=\; 8$.

  Dies formen wir um zu $2x \;=\; 8 - 4y$.

Gleichsetzen liefert

$$8 - 4y \;=\; 5 - 3y \;\Rightarrow\; y \;=\; 3$$

und weiter wie zuvor.

Additionsverfahren

Man multipliziert die Gleichungen mit geschickt gewählten Zahlen, so dass Unbekannte wegfallen, wenn man die Gleichungen anschliessend addiert: Wenn wir (2) mit -2 multiplizieren, erhalten wir das System

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5, && (1)\\ -2x - 4y &= -8. && (2') \end{aligned}$$

Jetzt addieren wir die zweite Gleichung (2') zur ersten (1) hinzu und erhalten

$$-y \;=\; -3 \;\Rightarrow\; y \;=\; 3$$

und weiter wie zuvor.

4 Zahlenfolgen

Als *Zahlenfolge* bezeichnet man eine unendliche Folge von Zahlen.

Beispiel (Ein paar einfache Zahlenfolgen)**.**

1. $\{1, 2, 3, 4, ...\}$,
2. $\{2, 4, 6, 8, ...\}$,
3. $\{2, 4, 8, 16, ...\}$,
4. $\{1, -1, 1, -1, ...\}$,
5. eine konstante Folge: $\{2, 2, 2, 2, ...\}$,
6. eine wilde Folge ohne erkennbare Gesetzmässigkeit: $\{1, 500, 49, 60, \frac{1}{5}, 33, ...\}$.

Allgemein schreibt man eine Zahlenfolge $\{a_1, a_2, a_3, a_4, ...\}$ oder kurz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei a_i als *i-tes Glied* der Folge bezeichnet wird.

Beispiel. Das 3. Glied in der zweiten Beispielfolge ist 6.

Wenn es eine Gesetzmässigkeit gibt, kann man die Folge vielleicht einfacher durch eine Vorschrift für a_n angeben. Für unsere Beispiele gilt für das n-te Glied:

1. $a_n = n$,
2. $a_n = 2n$,
3. $a_n = 2^n$,
4. $a_n = (-1)^{n+1}$,
5. $a_n = 2$.

Man schreibt dann zum Beispiel die 3. Folge auf als $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Bei Beispiel 6 gibt es kein einfaches Bildungsgesetz, welches einem just ins Auge springt.

Es gibt noch eine zweite Variante um eine Folge zu definieren, nämlich mit einer sogenannten *rekursiven Definition*. Dafür legt man einerseits den Startwert (also den Wert für a_1) fest und gibt zusätzlich noch eine Vorschrift an, wie man von einem bestimmten Glied der Zahlenfolge aus das nächste berechnen kann. Für unsere Beispiele sieht dies folgendermassen aus:

1. $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + 1$,
2. $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = a_n + 2$,
3. $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = 2a_n$,
4. $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = -a_n$,
5. $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = a_n$.

Mit Hilfe der rekursiven Definition können wir zwei spezielle Arten von Folgen charakterisieren:

Definition. (Arithmetische, geometrische Folgen)

- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *arithmetisch*, wenn es ein $d \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_{n+1} \;=\; a_n + d$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *geometrisch*, wenn es ein $q \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_{n+1} \;=\; a_n \cdot q$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir kürzen arithmetische Folgen mit AF und geometrische Folgen mit GF ab. Beispiele 1 und 2 sind AFs, mit $d \;=\; 1$ bzw. 2, Beispiele 3 und 4 sind GFs, mit $q \;=\; 2$ bzw -1.

Mit Folgen kann man auch rechnen. Die Regeln dafür lauten:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \;=\; (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} - (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \;=\; (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \;=\; (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \frac{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}{(b_n)_{n\in\mathbb{N}}} \;=\; \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

wobei Letzteres natürlich nur erlaubt ist, wenn $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

5 Grenzwerte

Wir betrachten nun die Folge

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots\right\}.$$

Was fällt auf? Alle Glieder sind positiv und je weiter man in der Folge nach hinten geht, desto kleiner werden sie. Bei genauer Betrachtung sieht man, dass sie beliebig nahe an 0 rankommen, wenn man nur genug weit nach hinten geht. Dieses "beliebig nahe" kann man mathematisch genau ausformulieren, allerdings würde dies hier den Rahmen sprengen.

Es gibt viele solcher Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die sich, je weiter man nach hinten geht, immer näher an eine Zahl a annähern. Ist dies der Fall, so sagt man $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ *konvergiert* mit dem *Grenzwert* (oder *Limes*) a, in kompakter Schreibweise

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

manchmal auch nur kurz

$$a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

Beispiel. (Grenzwerte)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Grenzwert hat, sagt man, dass die Folge *divergiert.* Alle unsere Beispiele divergieren, bis auf das Beispiel 5. Dieses konvergiert mit Limes 2, was ziemlich klar sein dürfte.

Gesetze für konvergierende Folgen. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergierende Folgen mit Limites a bzw. b. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n - b_n = a - b,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Natürlich setzen wir beim letzten Fall $b \neq 0, b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraus.

Damit können wir nun den Grenzwert für die Folge $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ berechnen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1.$$

Beispiel (Grenzwert für eine etwas kompliziertere Folge)**.** Wir fragen uns ob die Folge

$$\left(\frac{n^2+n-1}{3n^2+2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert und wenn ja, gegen was?

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-1}{3n^2+2n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})}{n^2(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\cancelto{0}{\frac{1}{n}}-\cancelto{0}{\frac{1}{n^2}}}{3+\cancelto{0}{\frac{2}{n}}+\cancelto{0}{\frac{1}{n^2}}} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

6 Vollständige Induktion

Wie sieht wohl die Vorschrift für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch

$$a_1 = 0 \text{ und } a_{n+1} = a_n + 2n$$

rekursiv definiert ist, aus? Wir schreiben dazu die ersten paar Glieder auf:

$$\{0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, ...\}.$$

Nach langem Nachdenken sieht man, dass da $\{1^2 - 1, 2^2 - 2, 3^2 - 3, 4^2 - 4, ...\}$ steht. Unsere Vermutung: $a_n = n^2 - n$.

Wie beweist man die Richtigkeit dieser Vermutung?

Beweis durch vollständige Induktion

Man beweist, dass die Aussage für $n = 1$ stimmt (Induktionsverankerung). Danach beweist man dass die Aussage für $n + 1$ stimmt, *unter der Annahme,* dass sie für n stimmt (Induktionsannahme). Dieses Schliessen von n auf $n + 1$ wird als Induktionsschritt bezeichnet.

Warum beweist dies die ganze Formel? Wenn es für $n = 1$ stimmt, so stimmt es für $n = 2$ wegen dem Induktionsschritt. Aber wenn es für $n = 2$ stimmt, dann auch für $n = 3$, wiederum wegen dem Induktionsschritt, usw. Aber für $n = 1$ stimmt es ja sicher, wegen der Induktionsverankerung!

Beispiel (Induktionsbeweis)**.**

Induktionsverankerung ($n = 1$): Gemäss Definition der Folge ist $a_1 = 0 = 1^2 - 1$.

Induktionsannahme (IA): Für ein n gelte, dass $a_n = n^2 - n$.

Induktionsschritt: Unter dieser Annahme beweisen wir, dass die Formel für $n + 1$ stimmt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2n \overset{\text{(IA)}}{=} n^2 - n + 2n \\ &= n^2 + n \\ &= n(n+1) \\ &= (n+1)n + (n+1) - (n+1) \\ &= (n+1)(n+1) - (n+1) = (n+1)^2 - (n+1). \end{aligned}$$

□

(**Bemerkung:** Das kleine Quadrat rechts kennzeichnet das Ende eines Beweises.)

7 Reihen

Summenschreibweise

Wir haben n Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ und wollen diese zusammenzählen. Wir sind aber zu faul um immer $a_1 + a_2 + ... + a_n$ zu schreiben. Darum führen wir folgende abkürzende

Schreibweise ein:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \;:=\; a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Hier ist i der *Laufindex*, 1 die *untere Grenze*, n die *obere Grenze* und die a_i geben an, was wir zusammenzählen.

Beispiel. Wollen wir die ersten n ungeraden Zahlen zusammenzählen, so schreiben wir nicht mehr $1 + 3 + ... + (2n - 1)$, sondern

$$\sum_{i\,=\,1}^{n} (2i - 1).$$

Hierbei vergewissere man sich selbst, dass $2i - 1$ die i-te ungerade Zahl ist.

Oder die Summe der ersten n Quadrate: $1 + 4 + 9 + ... + n^2$ heisst ab jetzt

$$\sum_{i\,=\,1}^{n} i^2.$$

Reihen

Mit dieser Schreibweise können wir aus jeder Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine neue Folge basteln, nämlich $(\sum_{k\,=\,1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$, die Folge, deren n-tes Glied die Summe der ersten n Glieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Wenn diese Folge konvergiert, so bezeichnet man ihren Grenzwert mit $\sum_{k\,=\,1}^{\infty} a_k$ und nennt dies die *Reihe* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Das n-te Glied der neuen Folge nennen wir *n-te Partialsumme* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und bezeichnen es mit S_n.

Beispiel (Partialsummen)**.**

Für arithmetische Folgen (AF) gilt: $S_n \;=\; \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n).$

Für geometrische Folgen (GF) gilt: $S_n \;=\; a_1\dfrac{1 - q^n}{1 - q} \;=\; a_1\dfrac{q^n - 1}{q - 1}.$

Beispiel (Geometrische Reihe für $q \;=\; \frac{1}{2}$)**.** Wir wollen

$$\sum_{n\,=\,1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$$

berechnen. Dies ist die Reihe der geometrischen Folge mit $a_1 = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{2}$. Gemäss oben gilt

$$S_n \;=\; \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \;=\; 1 - \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Also ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Man kann daraus folgendes sehen:

Geometrische Reihe. *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine GF mit* $|q| < 1$. *Dann gilt für die zugehörige Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

8 Funktionen

Wir kommen nun zu einem der wichtigsten Gegenstände der Mathematik, der Funktion.

Definition (Funktionen)**.** Eine *Funktion* f ist eine Vorschrift, die einer Zahl x genau eine Zahl y zuordnet. Man schreibt dann $y = f(x)$, manchmal auch $f : x \mapsto y$ ("f wirft x auf y").
x heisst das *Argument* der Funktion. Die x-Werte, denen sich durch die Funktion y-Werte zuordnen lassen, bilden den *Definitionsbereich* $\mathbb{D}$ der Funktion. Der Zielraum, also die Menge in welcher die y-Werte liegen können, heisst Wertebereich $\mathbb{W}$. Wenn es nötig ist, Definitions- und Wertebereich anzugeben, schreibt man f wie folgt:

$$f : \begin{cases} \mathbb{D} & \to & \mathbb{W} \\ x & \mapsto & y \end{cases}.$$

Man beachte, dass nicht alle Werte im Wertebereich angenommen werden müssen. Das bedeutet, dass es im Wertebereich auch Werte gibt auf welche kein einziges x aus dem Definitionsbereich geschickt wird. Daher kann es zu derselben Funktion verschiedene mögliche Wertebereiche geben. Man kann aber noch genauer sagen, wohin ein x aus dem Definitionsbereich abgebildet wird. Denn diejenigen Werte des Wertebereichs, welche tatsächlich angenommen werden, bilden den sogenannten Bildbereich $\mathbb{B}$. Wir wollen noch zwei Eigenschaften festhalten:

- Der Bildbereich ist im Wertebereich enthalten.
- Der Bildbereich ist der kleinstmögliche Wertebereich für eine gegebene Funktion f und einen zugehörigen Definitionsbereich $\mathbb{D}$.

Beispiel $(x^2, \sqrt{x}, \frac{1}{x})$**.**

- Sei f die Funktion, die einer Zahl ihr Quadrat zuordnet. Weil man jeder Zahl ihr Quadrat zuordnen kann, dürfen wir $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ nehmen. Das Quadrat einer reellen Zahl ist sicherlich wieder eine reelle Zahl. Deshalb können wir ebenfalls $\mathbb{W} = \mathbb{R}$ wählen. Für $\mathbb{B}$ gilt: $\mathbb{B} = \mathbb{R}_{\geq 0}$, denn alle Quadrate sind ja grösser oder gleich 0 und jede solche Zahl wird auch angenommen (man kann ja die Wurzel ziehen). f wird beschrieben durch

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases} \qquad \text{und es gilt: } \mathbb{B} = \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

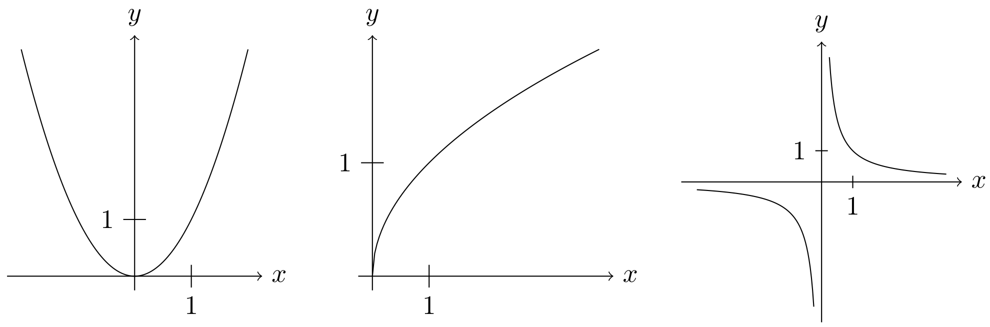
- Sei g die Funktion, die einer Zahl ihre Quadratwurzel zuordnet. Weil Quadratwurzeln aus negativen Zahlen nicht definiert sind, müssen wir $\mathbb{D} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ wählen. Die Wurzel einer solchen Zahl ist wiederum sicherlich reell. Daher können wir $\mathbb{W} = \mathbb{R}$ wählen. Da genau alle nichtnegativen Zahlen Quadratwurzeln sind, ist $\mathbb{B} = \mathbb{R}_{\geq 0}$. g wird beschrieben durch

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{cases} \qquad \text{und es gilt: } \mathbb{B} = \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

- Sei h die Funktion, die einer Zahl ihren Kehrwert zuordnet. Weil durch 0 teilen verboten ist, nehmen wir $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, die reellen Zahlen ohne 0, und weil 0 die einzige reelle Zahl ist, die kein Kehrwert einer weiteren Zahl ist, ist $\mathbb{B}$ dieselbe Menge. h wird beschrieben durch

$$h : \begin{cases} \mathbb{R}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{cases} \qquad \text{und es gilt: } \mathbb{B} = \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Funktionen kann man gut im kartesischen Koordinatensystem darstellen, indem man als x-Koordinaten Punkte aus $\mathbb{D}$ und als y-Koordinaten die zugehörigen Werte aus $\mathbb{W}$ verwendet.



(a) $f : x \mapsto x^2$ (b) $g : x \mapsto \sqrt{x}$ (c) $h : x \mapsto \frac{1}{x}$

So ein Bild nennt man den *Graph* einer Funktion.

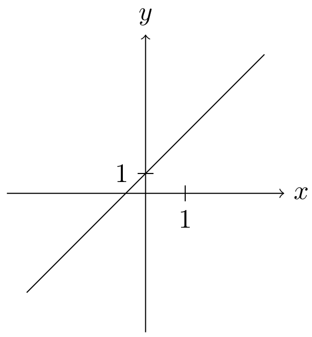
Lineare Funktionen

Eine erste Klasse von Funktionen, die wir untersuchen, sind die linearen Funktionen, definiert durch

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & mx + b \end{cases},$$

wobei m und b reelle Zahlen sind.

Beispiel $(m = 2, b = 1)$**.** Wir sehen, dass der Graph der Funktion eine Gerade ist. m ist die *Steigung* der Geraden und b die Höhe, auf der die Funktion die y-Achse schneidet. Sie wird als *y-Achsenabschnitt* bezeichnet.



Eine Zahl $x_0 \in \mathbb{D}$ mit $f(x_0) = 0$ nennt man *Nullstelle*. Lineare Funktionen haben genau eine Nullstelle. In unserem Beispiel muss gelten $0 = 2x_0 + 1$, also ist $x_0 = -\frac{1}{2}$ die Nullstelle. Allgemein muss gelten $0 = mx_0 + b$, also ist die Nullstelle im allgemeinen Fall $x_0 = -\frac{b}{m}$.

Wie finden wir die Steigung einer Funktion raus, wenn wir nur zwei Punkte $P = (x_1, y_1)$ und $Q = (x_2, y_2)$ auf ihrem Graphen kennen? Es muss gelten

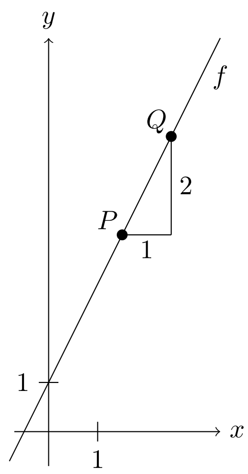
$$y_1 = mx_1 + b, \quad y_2 = mx_2 + b.$$

Wir subtrahieren die erste Gleichung von der zweiten Gleichung und erhalten

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

und so

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Wir sehen, dass die Steigung gerade das Verhältnis zwischen der vertikalen und der horizontalen Kathete des eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecks ist. So ein Dreieick wird als *Steigungsdreieck* bezeichnet.

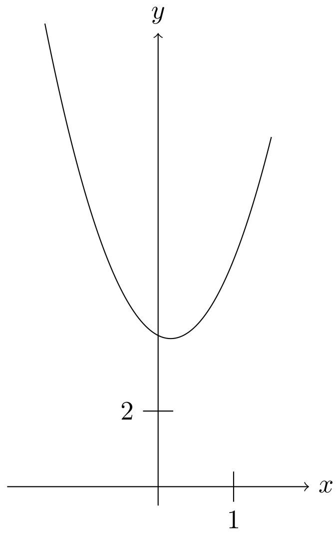
Polynome

Polynome sind Funktionen bestehend aus Summen von Vielfachen von natürlichen Potenzen. Ihr Definitionsbereich ist immer $\mathbb{R}$.

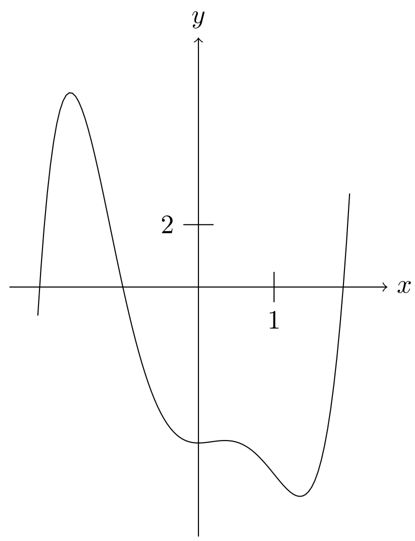
Beispiel (Polynome)**.**

(a) $f : x \mapsto 3x^2 - x + 4$

(b) $g : x \mapsto x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 5$



(a) $f : x \mapsto 3x^2 - x + 4$



(b) $g : x \mapsto x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 5$

Allgemein schreibt man Polynome folgendermassen:

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$.

Die a_i werden als *Koeffizienten* bezeichnet. Man ordnet die Potenzen ihrer Grösse nach. Die höchste vorkommende Potenz bezeichnet man als *Grad* des Polynoms. Wenn ein Polynom p Grad d hat, so sagt man p ist von *Ordnung* d, oder von d-ter Ordnung.

Beispiel (Grad)**.** Die Polynome von Grad 1 sind gerade die linearen Funktionen.

Wenn d der Grad eines Polynoms ist, so kann es höchstens d Nullstellen haben. Die Bestimmung der Nullstellen kann sehr schwierig werden. Für Polynome 1. Ordnung haben wir das im vorherigen Abschnitt gesehen. Für Polynome 2. Ordnung gibt es die Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Für Polynome 3. Ordnung gibt es einen Trick, wenn man eine der drei Nullstellen schon kennt: Die Polynomdivision.

Polynomdivision

Sei $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Sei x_0 eine Nullstelle von p. Dann können wir

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = q(x) \cdot (x - x_0)$$

schreiben, wobei $q(x)$ ein Polynom 2. Ordnung ist, dessen zwei Nullstellen gerade die anderen beiden Nullstellen von p sind. Wie erhält man q?

Wir machen den Ansatz $q(x) = ax^2 + bx + c$ und erhalten

$$\begin{aligned} a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 &= (ax^2 + bx + c) \cdot (x - x_0) \\ &= ax^3 + (b - x_0a)x^2 + (c - x_0b)x - x_0c \end{aligned}$$

und so, durch sukzessiven Vergleich der Koeffizienten,

$$\begin{aligned} a &= a_3, \\ b &= a_3x_0 + a_2, \\ c &= a_3x_0^2 + a_2x_0 + a_1. \end{aligned}$$

Für Polynome höherer Ordnung wird es noch schwieriger. Meist muss man den Computer zu Hilfe nehmen.

Gebrochenrationale Funktionen

Seien p, q Polynome und $q_1, q_2, ..., q_d$ die Nullstellen von q. Dann gibt es eine Funktion

$$r : \begin{cases} \mathbb{R}\backslash\{q_1, q_2, ..., q_d\} & \to & \mathbb{W} \\ x & \mapsto & \frac{p(x)}{q(x)} \end{cases}.$$

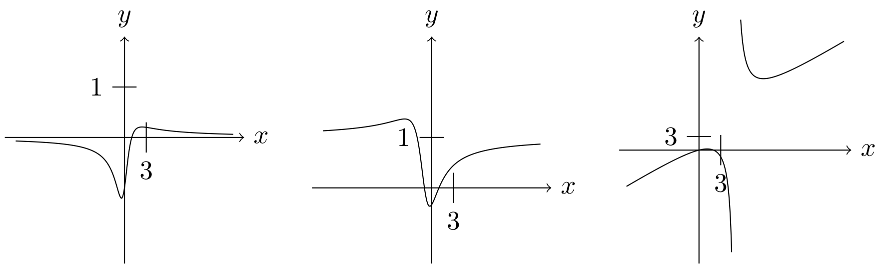
Funktionen von dieser Bauart nennt man *gebrochenrationale Funktionen*. Die Nullstellen von q müssen wir vom Definitionsbereich ausschliessen, weil Division durch 0 nicht erlaubt ist.

Beispiel (Einige gebrochenrationale Funktionen)**.**

(a) $f : x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}$

(b) $g : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+2x+3}$

(c) $h : x \mapsto \frac{x^3-2x^2}{x^2-5x}$



(a) $f : x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}$ (b) $g : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+2x+3}$ (c) $h : x \mapsto \frac{x^3-2x^2}{x^2-5x}$

In den Nullstellen der Nenner sind gebrochenrationale Funktionen nicht definiert, rundherum aber schon. Wir können untersuchen, was passiert, wenn wir beliebig nahe an einen solche Nennernullstelle rangehen.

Dies tut man, indem man aus der Funktion eine Folge bastelt. Nennen wir die Funktion f und die Nullstelle s. Man nimmt eine Folge mit Grenzwert s (z.B. $(s + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$) und schaut, was passiert, wenn man die Funktion drauf anwendet, d.h. das Verhalten der Folge $(f(s + \frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel ($r(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$)**.** Wir finden die Nullstellen des Zählers und des Nenners heraus. Für den Zähler erhalten wir $x = 1$ und $x = -1$, für den Nenner $x = -3$ und $x = 1$. Wir können r also wiefolgt schreiben:

$$r(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}.$$

Zuerst untersuchen wir $s = -3$ mit einer Folge, die von oben nach s geht: z.B. $(-3 + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} r\left(-3 + \frac{1}{n}\right) &= \frac{(-3 + \frac{1}{n} - 1)(-3 + \frac{1}{n} + 1)}{(-3 + \frac{1}{n} - 1)(-3 + \frac{1}{n} + 3)} = \frac{-2 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \\ &= -2n + 1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty. \end{aligned} \tag{1}$$

Was passiert, wenn wir eine Folge nehmen, die von unten nach s geht, z.B. $(-3-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$?

$$\begin{aligned} r\left(-3 - \frac{1}{n}\right) &= \frac{(-3 - \frac{1}{n} - 1)(-3 - \frac{1}{n} + 1)}{(-3 - \frac{1}{n} - 1)(-3 - \frac{1}{n} + 3)} = \frac{-2 - \frac{1}{n}}{\frac{-1}{n}} \\ &= 2n + 1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \end{aligned} \tag{2}$$

Wir sehen, dass da nicht dasselbe rauskommt.

(1) bezeichnet man als *rechtsseitigen Grenzwert*,

$$\lim_{x\searrow s} r(x),$$

(2) als *linksseitigen Grenzwert* oder kurz

$$\lim_{x\nearrow s} r(x).$$

Eine solche Nullstelle des Nenners, bei der die Grenzwerte $\pm\infty$ sind (auch *uneigentliche Grenzwerte* genannt) nennt man *Polstelle*. Die vertikale Gerade durch die Nullstelle nennt man (vertikale) *Asymptote*.

Nun untersuchen wir $s = 1$. Zuerst ist

$$\lim_{x \searrow 1} r(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n}-1)(1+\frac{1}{n}+1)}{(1+\frac{1}{n}-1)(1+\frac{1}{n}+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2+\frac{1}{n})}{(4+\frac{1}{n})} = \frac{1}{2}$$

und dann, ähnlich,

$$\lim_{x \nearrow 1} r(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{1}{n}-1)(1-\frac{1}{n}+1)}{(1-\frac{1}{n}-1)(1-\frac{1}{n}+3)} = \frac{1}{2}.$$

Der links- und rechtsseitige Grenzwert ist derselbe. Eine solche Nennernullstelle heisst *Unbestimmtheitsstelle* (sie wird in der Mathematik auch mit dem komplizierteren Begriff *hebbare Singularität* bezeichnet).

Diese Untersuchung kann man bei einer Funktion f an einer beliebigen Stelle s durchführen. Wenn der Grenzwert von beiden Seiten her kommend derselbe ist, sagen wir c, dann nennen wir dies den Grenzwert von f bei s und schreiben

$$\lim_{x\to s} f(x) = c.$$

Uneigentliche Grenzwerte

Eine Form von uneigentlichen Grenzwerten haben wir bei den Polstellen schon kennengelernt. Eine andere Form taucht beim Betrachten des Verhaltens einer gebrochenrationalen Funktion f für $x \to \pm\infty$ auf. Dieses untersucht man z.B. mit den Folgen $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(-n)_{n\in\mathbb{N}}$ und schreibt, wenn so ein Grenzwert c existiert,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c.$$

Achtung: c kann sehr wohl $\pm\infty$ sein!

Verhalten einer Funktion für $x \to \pm\infty$

Sei f eine gebrochenrationale Funktion, Z der Grad des Zählers, N der Grad des Nenners. Es gibt drei Fälle:

$N > Z$**:**

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

$N < Z$**:**

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

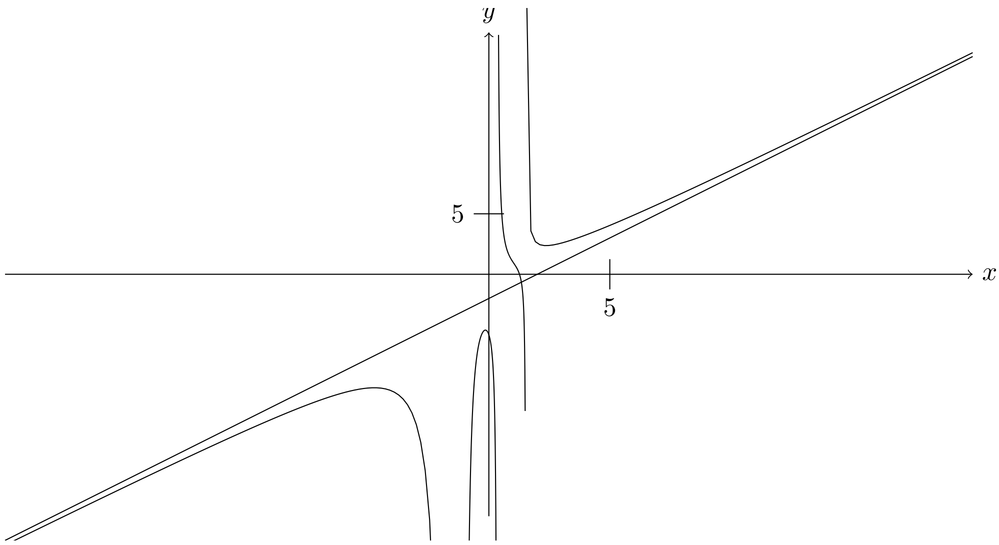
(Was genau auf welcher Seite geschieht muss untersucht werden!)

$N = Z$**:**

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a_Z}{a_N}$$

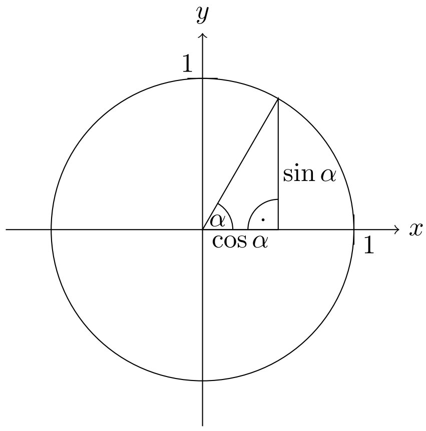
wobei a_Z der erste Koeffizient des Zählers und a_N der erste Koeffizient des Nenners ist.

Im letzten Fall heisst die horizontale Linie mit der Höhe $\frac{a_Z}{a_N}$ *(horizontale) Asymptote*. Im Spezialfall $Z = N + 1$ kann man mittels Polynomdivision eine schräge Asymptote finden.



$$x \mapsto \frac{x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5}{x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 1} \qquad \text{(mit Asymptote)}$$

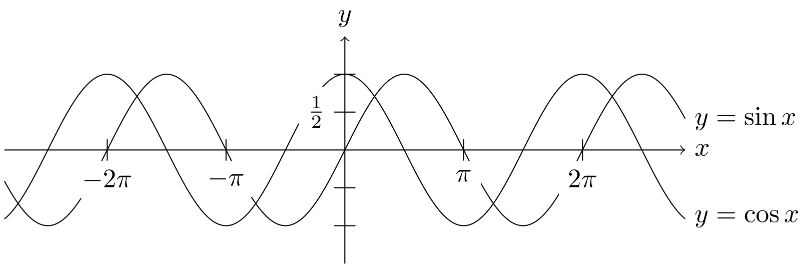
9 Trigonometrische Funktionen



Wir schreiben dem Einheitskreis, wie oben dargestellt, ein rechtwinkliges Dreieck ein. Wir denken uns den Winkel α im Bogenmass und definieren:

$\sin\alpha :=$ Länge der Gegenkathete (Sprechweise: „Der Sinus von α“),
$\cos\alpha :=$ Länge der Ankathete (Sprechweise: „Der Cosinus von α“).

Dies sind beides Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $[-1, 1]$. Eine Funktion heisst *periodisch mit Periode T* falls $f(x + T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}$. Weil wir nach einer Drehung der Hypotenuse um den Ursprung um den Winkel 2π dasselbe Dreieck erhalten wie vorher, müssen Sinus und Cosinus 2π-periodisch sein. Sie sehen so aus:



Wir sehen, dass der Cosinus gerade der Sinus um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben ist:

$$\cos x \ = \ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Wegen dem Satz von Pythagoras erhalten wir vom Bild des Einheitskreises

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \ = \ 1 \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Andere wichtige Formeln:

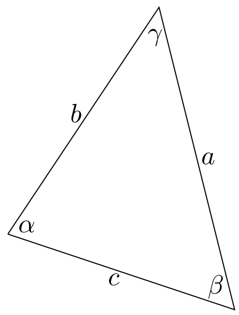
$$\begin{aligned} \sin\alpha \pm \beta &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \\ \cos\alpha \pm \beta &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

Schliesslich gilt in allgemeinen Dreiecken

$$\text{Sinussatz: } \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

und

$$\text{Cosinussatz: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

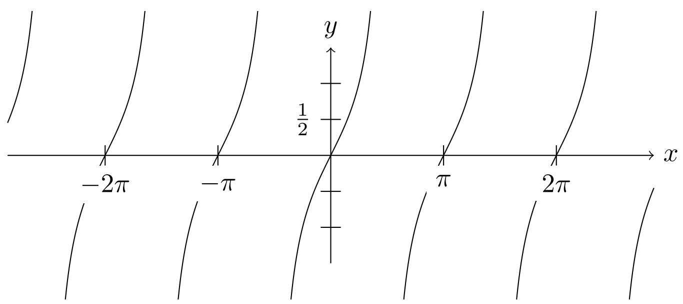


Diese beiden Sätze dienen dazu, aus bekannten Seiten und Winkeln die unbekannten abzuleiten.

Ferner definiert man als Tangens

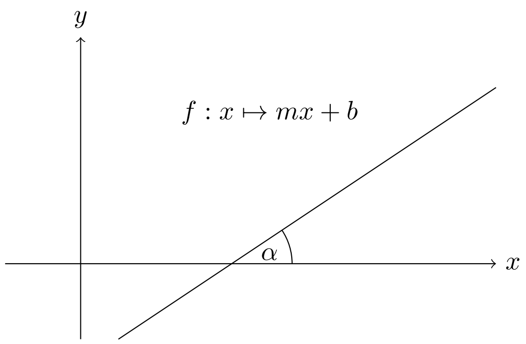
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

das Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete. Auch der Tangens ist periodisch, jedoch hat er eine kürzere Periode, nämlich π. Bis auf die Nullstellen des Cosinus ist der Tangens auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.



$y = \tan x$

Der Tangens ist wichtig für die Steigungsbestimmung. Für eine Gerade gegeben durch $y = mx + b$ gilt nämlich $m = \tan\alpha$, wo α wie im Bild ist.

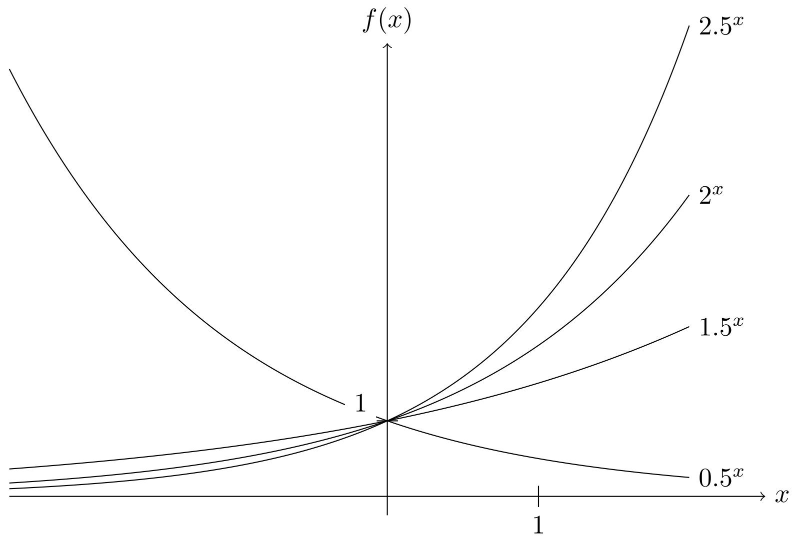


10 Exponentialfunktion und Logarithmen

Exponentialfunktionen

Als Exponentialfunktion bezeichnet man eine Funktion des Typs

$$f : x \mapsto a^{cx}, \quad a \in \mathbb{R}_{\geq 0}, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$



$f : x \mapsto a^x$ mit $a = 0.5,\ 1.5,\ 2,\ 2.5$

Die Zahl a heisst hierbei *Basis*, die Variable x der *Exponent*. Anhand des Bilds sieht man, dass $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{B} = \mathbb{R}_{>0}$ (für $a \neq 1$). Somit kann man jede positive Zahl b schreiben als $b = a^c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Dies ermöglicht uns verschiedene Exponentialfunktionen durch einander auszudrücken:

$$b^x = a^{cx}.$$

Deshalb darf man sich beim Studium von Exponentialfunktionen auf *eine* Basis beschränken. Wir wählen $a = e$, die Eulersche Zahl, weil sie besonders schöne Eigenschaften hat, wie wir später sehen werden. Wer e noch nicht kennt: Man kann sie definieren durch

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

und sie hat ungefähr den Wert $e = 2.718281828459....$

Exponentialfunktionen werden oft zum Beschreiben von Wachstum und Zerfall benutzt. Bei $c > 0$ hat man Wachstum, bei $c < 0$ Zerfall.

Logarithmus

Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

Definition (Umkehrfunktion)**.** Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$. Falls es eine Funktion $g : \mathbb{W} \to \mathbb{D}$ gibt so dass $g(f(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{D}$ und $f(g(y)) = y$ für alle $y \in \mathbb{W}$, so heisst f *umkehrbar* und g *Umkehrfunktion* von f.

Wir bezeichnen den Logarithmus mit log. Also gilt

$$\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$$

sowie

$$e^{\log x} = x \qquad \text{und} \qquad \log e^x = x.$$

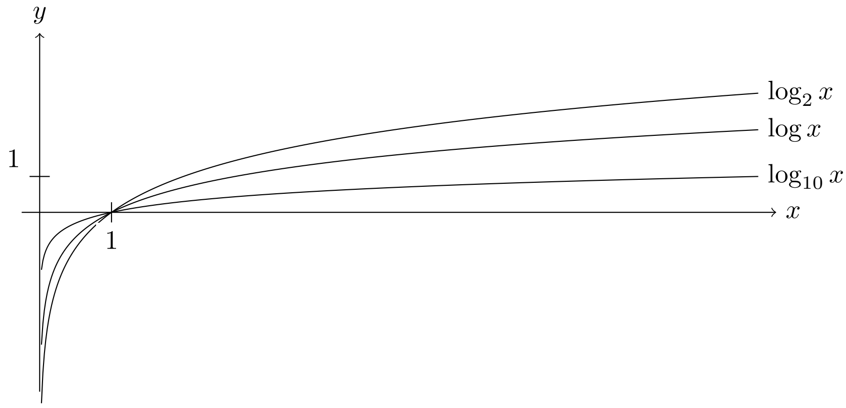
Der Logarithmus von x ist also gerade die Zahl, mit der man e potenzieren muss, um x zu erhalten. Man kann den Logarithmus aber nicht nur zur Basis e definieren: Man bezeichnet die Zahl mit der man eine Zahl a potenzieren muss, um x zu erhalten als $\log_a x$ (Sprechweise: "Logarithmus von x zur Basis a.").

Aber ähnlich wie bei der Exponentialfunktion gibt es keine grossen Unterschiede zwischen den verschieden Logarithmen. Es gilt nämlich

$$x = a^{\log_a x}.$$

Da $b = a^{\log_a b}$ gilt auch

$$x = b^{\log_b x} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b x} = a^{\log_a b \cdot \log_b x}$$



Logarithmus zu den Basen 10, 2 und e.

und daraus folgern wir

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x.$$

Die verschieden Logarithmen unterscheiden sich also nur um einen Faktor. Wir werden fortan nur noch mit dem Logarithmus zur Basis e arbeiten. Dieser wird auch *natürlicher Logarithmus* genannt.

Wir fassen die Rechenregeln für den Logarithmus kurz zusammen:

$$\begin{aligned}
\log(ab) &= \log a + \log b, \\
\log\left(\frac{a}{b}\right) &= \log a - \log b, \\
\log(a^r) &= r \log a.
\end{aligned}$$

Beispiel (Halbwertszeit)**.** Der Fischbestand in der Nordsee sei momentan C. Die Fischer arbeiten so, dass sich der Bestand der Fische durch die Funktion $f(t) = Ce^{-\lambda t}$ beschreiben lässt, wobei λ eine positive Zahl ist. Wir haben also einen negativen Exponenten, deshalb einen Zerfallsprozess und ferner ist $f(0)$ tatsächlich C, die Funktion macht also Sinn. Wir fragen nun nach der Zeit T, die es braucht, um die Nordsee auf die Hälfte der Fische hinunterzufischen. Es muss gelten

$$Ce^{-\lambda T} = \frac{C}{2},$$

also

$$e^{-\lambda T} = \frac{1}{2},$$

und so, nachdem man auf beiden Seiten logarithmiert,

$$-\lambda T = \log\frac{1}{2} = \log 1 - \log 2 = -\log 2$$

und letztlich

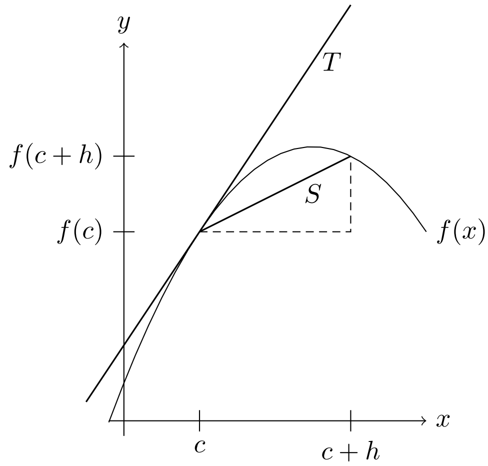
$$T = \frac{\log 2}{\lambda}.$$

11 Differentiation

Differenzierbarkeit

Wir wollen die Steigung einer Funktion f in einem bestimmten Punkt c untersuchen, wobei wir unter der Steigung von f in c die Steigung der Tangente T an f durch $(c, f(c))$ verstehen. Wie finden wir die Tangentensteigung m_T?

Wir nehmen einen Punkt $c + h$, ein wenig von c entfernt, und legen die Sekante S durch die Punkte $(c, f(c))$ und $(c + h, f(c + h))$, die auf dem Graph von f liegen. Die



Steigung von S beträgt

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{c + h - c} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}. \tag{1}$$

Die Gleichung (1) wird als *Differenzenquotient* bezeichnet. Je mehr wir nun mit h gegen 0 gehen, desto mehr nähert sich S an T, und damit nähert sich (1) auch an die gesuchte Steigung m_T an. Es gilt

$$m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} =: f'(c).$$

Wir nennen $f'(c)$ die *Ableitung von f an der Stelle c* oder auch *Differentialquotient* und wir sagen f ist *differenzierbar* in c. Auf allen Punkten wo f differenzierbar ist definiert f also eine neue Funktion f', die wir die *Ableitung* von f nennen. Manchmal wird f' auch $\frac{df}{dx}$ geschrieben. Sie ist die *Steigungsfunktion* von f.

Beispiel. Wir wollen $f : x \mapsto x^2$ in $c \in \mathbb{D}$ differenzieren. Wir beginnen mit

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \frac{(c+h)^2 - c^2}{h} = \frac{c^2 + 2hc + h^2 - c^2}{h} = 2c + h.$$

Nun lassen wir h gegen 0 gehen:

$$\lim_{h \to 0} 2c + h = 2c.$$

Da $c \in \mathbb{D}$ beliebig war, ist f also überall differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = 2x.$$

Genau wie f kann man f' ableiten. Man nennt die so erhaltene Funktion *zweite Ableitung* von f und schreibt f''. Analog kann man die n-te Ableitung $f^{(n)}$ definieren.

Ableitungsregeln

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (cf)' = c \cdot f', \quad c \in \mathbb{R}$$
$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (c)' = 0, \quad c \in \mathbb{R}$$

Damit können wir Polynome ableiten:

Beispiel.

$$(x^5 + 3x^2 + 1)' = (x^5)' + 3(x^2)' + (1)' = 5x^4 + 3 \cdot 2x = 5x^4 + 6x$$

Produkt- und Quotientenregel

$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ wo } v \neq 0$$

Beispiel.

$$\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

Ableitungen einiger wichtiger Funktionen

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \overset{\text{Quot.-regel}}{=} \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(e^x)' = e^x \quad \text{(Darum nimmt man } e \text{ als Basis für Exponentialfunktionen!)}$$

Kettenregel

Seien f, g zwei Funktionen. Wir können, sofern g in $\mathbb{D}$ von f landet, eine neue Funktion h basteln, indem wir f und g aneinanderhängen. Zuerst wenden wir g auf x an und dann f auf die Zahl die wir erhalten haben:

$$h(x) := f(g(x)).$$

Wie sieht die Ableitung von h aus? Es gilt:

$$h'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x). \qquad \textit{(Kettenregel)}$$

Beispiel (Ableitung von $\sin(x^2)$)**.** Es seien

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & (f'(x) &= \cos x) \\ g(x) &= x^2, & (g'(x) &= 2x) \\ h(x) = f(g(x)) &= \sin x^2. \end{aligned}$$

Also ist die Ableitung von h:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2.$$

Man nennt $f'(g(x))$ die *äussere Ableitung* und $g'(x)$ die *innere Ableitung*. Merkregel für die Kettenregel:

„Äussere Ableitung mal innere Ableitung.“

Achtung: Die äussere Ableitung hat als Argument $g(x)$, nicht x!

Beispiel. Mit Hilfe der Kettenregel können wir die Ableitung des Logarithmus bestimmen:

$$\begin{aligned} e^{\log x} &= x, \\ \left(e^{\log x}\right)' &= 1. \end{aligned}$$

Aber

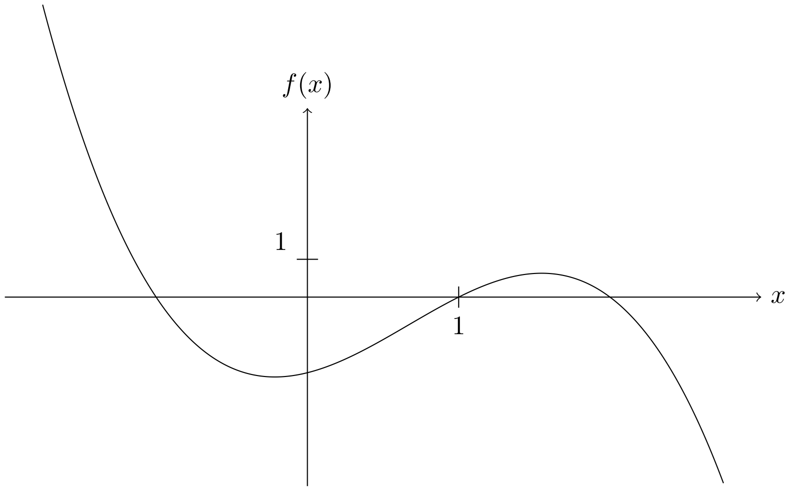
$$\left(e^{\log x}\right)' = e^{\log x} \cdot \log' x = x \log' x,$$

also

$$x \log' x = 1 \text{ und so } \log' x = \frac{1}{x}.$$

Optimierung

Wir haben eine Funktion $f(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2$. Sie sieht so aus:

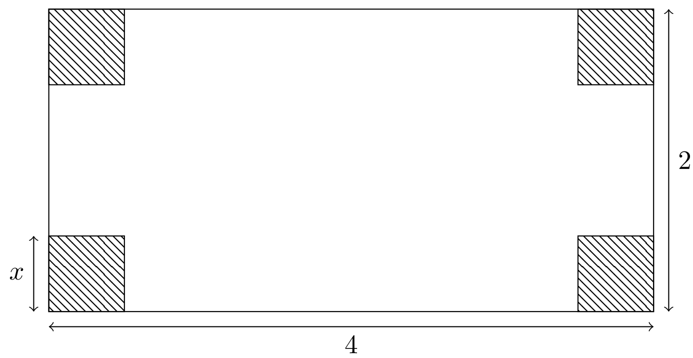


Wir wollen herausfinden, wo im ersten Quadranten die Funktion ihr Maximum hat. Wie sieht die Steigung um das Maximum herum aus? Von links her kommend ist sie positiv und wird immer kleiner, bis sie nach dem Maximum negativ wird. Also muss sie im Maximum 0 sein. Es gilt

$$f \text{ hat ein Maximum in } x \Longrightarrow f'(x) = 0.$$

Dasselbe gilt natürlich für ein Minimum. Man nennt die Minima und Maxima *Extremalwerte* oder *Extrema*. Damit kann man gut Optimierungsaufgaben lösen:

Beispiel. Wir haben einen 2×4-Karton. Wir schneiden von den Ecken Quadrate weg und falten den Rest zu einer (offenen) Kiste. Wie lang müssen die Seiten der Quadrate sein, damit die Kiste möglichst viel fasst?



Das Volumen der Kiste ist

$$V(x) = x(2 - 2x)(4 - 2x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x.$$

Wir wollen V maximieren. Also müssen wir die Nullstellen von $V'(x)$ finden.

$$\begin{aligned} V'(x) &= 12x^2 - 24x + 8 \\ 12x^2 - 24x + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + \frac{2}{3} &= 0 \end{aligned}$$

und daraus erhalten wir

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - \frac{8}{3}}}{2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

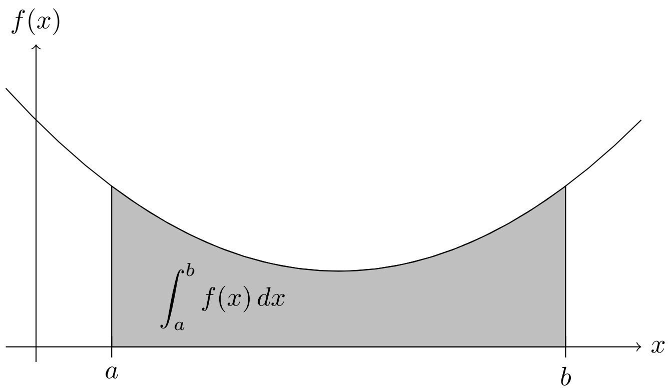
Da ein negatives Volumen keinen Sinn macht, bleibt die Lösung $x = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

12 Integration

Beim *Integrieren* sucht man für eine Funktion f eine andere Funktion F so dass $F' = f$. F heisst dann *Stammfunktion* von f. Hat man eine Stammfunktion F gefunden, so ist $F + C, C \in \mathbb{R}$, ebenso eine Stammfunktion, da die Konstante C beim Ableiten verschwindet. Wenn es also mindestens eine Stammfunktion gibt, so gibt es unendlich viele. Man nennt die Menge der Stammfunktionen das *unbestimmte Integral* von f und notiert sie durch

$$\int f(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Ursprünglich wurde das Integral beim Bestimmen von Flächen, die unter dem Graphen einer Funktion f und zwischen zwei vertikalen Achsen $x = a$ und $x = b$ liegen, gefunden.



Diese Fläche bezeichnet man mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

und nennt dies ein *bestimmtes Integral.* a, b sind die *Integrationsgrenzen*, $f(x)$ der *Integrand* und x die *Integrationsvariable.* Es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b\,.$$

Integrationsregeln

$$\begin{aligned}\int (f+g)\,\mathrm{dx} &= \int f\,\mathrm{dx} + \int g\,\mathrm{dx},\\ \int c\cdot f\,\mathrm{dx} &= c\int f\,\mathrm{dx}, \qquad \text{für alle } c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Diese und die folgenden Regeln ergeben sich daraus, dass wir bei der Integration die Differentiation umkehren wollen!

$$\begin{aligned}\int x^n\,\mathrm{dx} &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{für } n\neq -1,\\ \int \sin x\,\mathrm{dx} &= -\cos x + C,\\ \int \cos x\,\mathrm{dx} &= \sin x + C,\\ \int e^x\,\mathrm{dx} &= e^x + C,\\ \int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} &= \log|x| + C.\end{aligned}$$

Beispiel. Wir wollen die Fläche unter dem Graph von $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ zwischen den Nullstellen von f bestimmen. Zuerst suchen wir die Nullstellen von f. Wir finden $x_1 = 1, x_2 = 3$. Wir müssen

$$\int_1^3 f(x)\,\mathrm{dx}$$

berechnen.

$$\begin{aligned}
\int_1^3 f(x)\,\mathrm{dx} &= \int_1^3 -x^2+4x-3\,\mathrm{dx}\\
&= \int_1^3 -x^2\,\mathrm{dx} + \int_1^3 4x\,\mathrm{dx} + \int_1^3 -3\,\mathrm{dx} = -\int_1^3 x^2\,\mathrm{dx} + 4\int_1^3 x\,\mathrm{dx} - 3\int_1^3 1\,\mathrm{dx}\\
&= -\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 + 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 - 3\,[x]_1^3 \;=\; \left[-\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 3x\right]_1^3\\
&= (-9+18-9) - (-\frac{1}{3}+2-3) \;=\; 0-(-\frac{4}{3})\\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Partielle Integration

Produkte können wir mit der Formel für partielle Integration berechnen. Es gilt

$$\int_a^b fg\,\mathrm{dx} = [Fg]_a^b - \int_a^b Fg'\,\mathrm{dx},$$

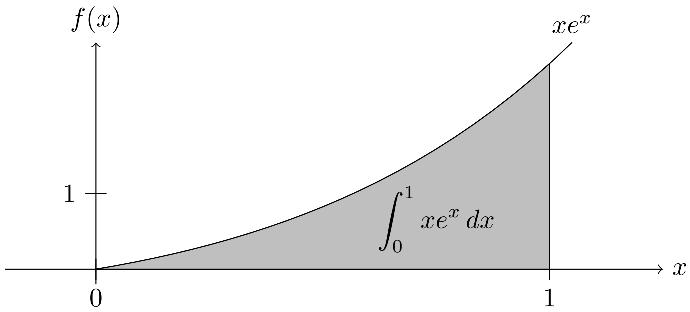
wobei F natürlich eine Stammfunktion von f ist. Dies ist das Analogon für die Produktformel der Differentialrechnung.

Beispiel. Als erstes Beispiel betrachten wir

$$\int_0^1 xe^x\,\mathrm{dx}\,.$$

Mit der partiellen Integration gilt

$$\int_0^1 xe^x\,\mathrm{dx} = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{dx} = e - [e^x]_0^1 = e - e + 1 = 1.$$



Beispiel. Wir wollen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \,\mathrm{du}$$

berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \,\mathrm{du} \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \cdot \cos u \,\mathrm{du} \;&= \big[\sin u \cdot \cos u\big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \cdot (-\sin u) \,\mathrm{du} \\
&= (\sin \frac{\pi}{2} \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} - \underbrace{\sin 0}_{=0} \cos 0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u \,\mathrm{du} \\
&= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos^2 u \,\mathrm{du} \;=\; \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \,\mathrm{du}\,.
\end{aligned}$$

Dies führt auf

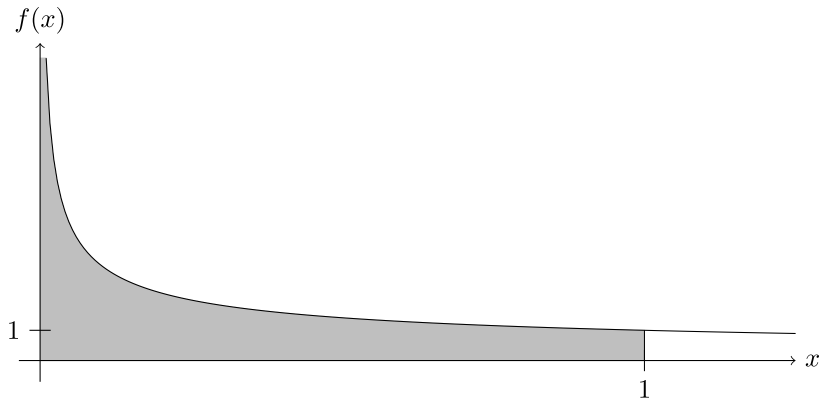
$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \,\mathrm{du} \;=\; \frac{\pi}{2}$$

und so

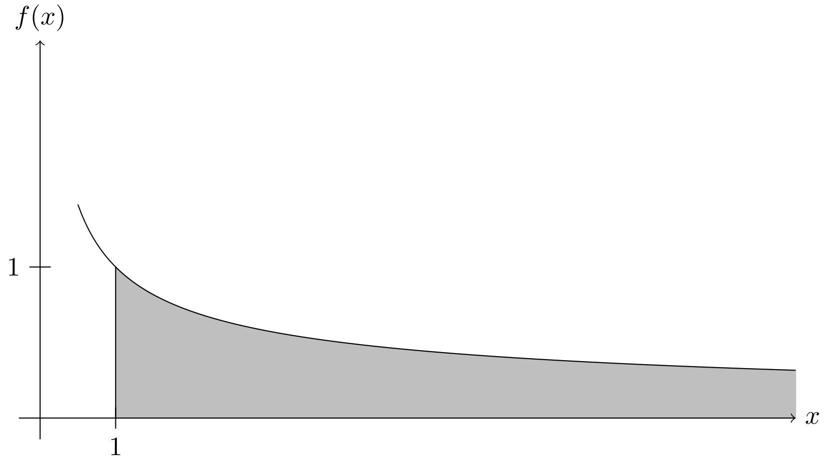
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \,\mathrm{du} \;=\; \frac{\pi}{4}.$$

Uneigentliche Integrale

Manchmal will man Flächen bestimmen, deren Integrationsgrenzen nicht zum Definitionsbereich des Integranden gehören. Es gibt zwei Fälle. Einerseits können a oder b ganz normale Zahlen sein, die einfach nicht in $\mathbb{D}$ sind, andererseits kann $a = -\infty$ oder $b = \infty$ sein.



(a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$: Der Integrand nimmt bei 0 keinen Wert an.



(b) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$: Der Integrand geht bis $+\infty$.

In beiden Fällen berechnet man das Integral, in dem man statt der kritischen Integrationsgrenze eine Folge in $\mathbb{D}$ nimmt, die gegen diese Grenze konvergiert. Wir illustrieren dieses Vorgehen anhand eines Beispiels (dieses Beispiel entspricht dem Bild (a) von oben).

Beispiel.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{dx} := \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{dx},$$

denn 0 ist ja nicht in $\mathbb{D}$ von $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Es gilt

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{dx} = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{dx} = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = 2 - 2\sqrt{\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 2.$$

Integrale dieser Formen nennt man *uneigentliche Integrale.*

Substitutionsregel

Manchmal lässt sich ein kompliziertes Integral durch Ersetzen der Integrationsvariable mit einer Funktion vereinfachen. Dies geschieht nach der Formel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_c^d f(g(u))g'(u)\,\mathrm{du}, \tag{1}$$

wobei c, d so, dass $g(c) = a$, $g(d) = b$. Man kann die Gleichung auch umkehren, wenn dies nützlich ist.

Beispiel. Wir möchten mittels Substitution das folgende Integral berechnen:

$$\int_0^1 \frac{4u+3}{2u^2+3u+1}\,\mathrm{du}\,.$$

Es ist

$$\left(2u^2+3u+1\right)' = 4u+3,$$

daher wählen wir $g(u) = 2u^2 + 3u + 1$ und $f(x) = \frac{1}{x}$ und erhalten nach Anpassung der Grenzen

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{4u+3}{2u^2+3u+1}\,\mathrm{du} &= \int_0^1 f(g(u))g'(u)\,\mathrm{du}\\ &= \int_1^6 f(x)\,\mathrm{dx} = \int_1^6 \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \log(6) - \log(1) = \log(6).\end{aligned}$$

Beispiel. Wir wollen

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx}$$

berechnen. Wir versuchen es mit der Substitution $x = \sin u$. Gemäss (1) gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,\mathrm{du}\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 u}\cos u\,\mathrm{du} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,\mathrm{du} = \frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

gemäss unserem Beispiel für die partielle Integration. Man beachte, wie wir die Integrationsgrenzen angepasst haben:

$$1 = \sin\frac{\pi}{2}, \quad 0 = \sin 0.$$

Beispiel. In manchen Fällen sind wir an unbestimmten Integralen interessiert. Wir betrachten folgendes Beispiel:

$$\int 7e^{\sin(u)} \cos(u) \, \mathrm{du}\,.$$

Wir beobachten, dass $\cos(u)$ die Ableitung von $\sin(u)$ ist. Also wählen wir $f(x) = e^x$ und $g(u) = \sin(u)$. Entsprechend folgt nach Substitution mit $g(u) := x$, $g'(u)\,\mathrm{du} = \mathrm{dx}$,

$$\int 7e^{\sin(u)} \cos(u) \, \mathrm{du} = 7 \int e^x \, \mathrm{dx} = 7e^x + C.$$

Allerdings suchen wir eine Stammfunktion, die abhängig von u ist, nicht von x. Also ersetzen wir x wieder durch $\sin(u)$ und erhalten

$$\int 7e^{\sin(u)} \cos(u) \, \mathrm{du} = 7e^{\sin(u)} + C.$$

13 Lösen von Gleichungssystemen

Zu Beginn des Kurses haben wir folgendes Gleichungssystem gelöst:

$$2x + 3y = 5 \tag{1}$$
$$x + 2y = 4 \tag{2}$$

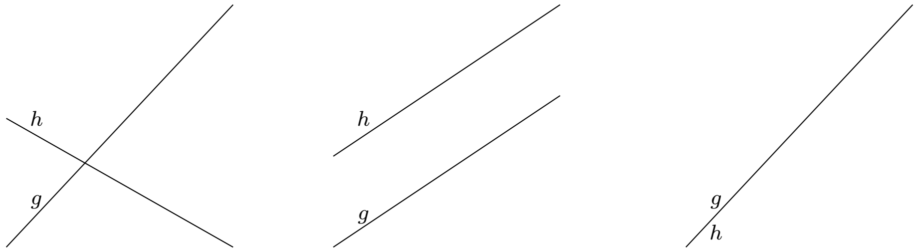
In diesem Beispiel haben wir genau eine Lösung erhalten. Ist dies immer so? Um diese Frage zu beantworten betrachten wir das Problem geometrisch.

Verschiedene Lösungsmengen

Wir haben ein Gleichungssystem

$$ax + by = e \tag{3}$$
$$cx + dy = f \tag{4}$$

Beide Gleichungen können zu Geradengleichungen der Form $y = mx + b$ umgeformt werden, z.B. (3) zu $y = -\frac{a}{b}x + \frac{e}{b}$. (Wir setzen hier $b \neq 0$ voraus, denn mit $b = 0$ wäre die Aufgabe einfach zu lösen .) Ihre jeweilige Lösungsmenge ist also eine Gerade. Die gemeinsamen Lösungen sind also die Punkte, die auf beiden Geraden liegen.



(a) Geraden kreuzen sich (b) Geraden sind parallel (c) Geraden fallen aufeinander

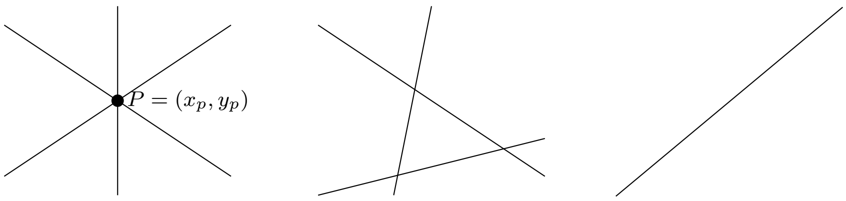
Was gibt es da für Möglichkeiten und wie häufig treten die verschiedenen Fälle auf? Für Fall (c) müssen g und h genau gleich sein, für Fall (b) müssen sie mindestens dieselbe Steigung haben und im Fall (a) sind wir, sobald sie verschiedene Steigungen haben. Also ist Fall (a) (mit Abstand) am wahrscheinlichsten, dann Fall (b) und am unwahrscheinlichsten ist Fall (c). Dieses Resultat gilt auch für n Gleichungen mit n Unbekannten.

Anzahl Gleichungen$\neq$ Anzahl Unbekannte

Wie sieht es aus, wenn die Anzahl Gleichungen m nicht mit der Anzahl Variablen n übereinstimmt?

$m < n$: Man denke nur an $m = 1, n = 2$, eine Gleichung der Form $ax + by = c$. Dies ist, wie oben, eine Geradengleichung und hat somit unendlich viele Lösungen. $m = 1, n = 2$ ist kein Spezialfall, falls $m < n$ kann es unendlich viele Lösungen geben. Haben wir mehrere Gleichungen ($m > 1$), so kann es auch vorkommen, dass die Gleichungen einander widersprechen. In diesem Fall gibt es keine Lösung.

$m > n$: Hierzu denke man wieder an Geraden: Nehmen wir $m = 3, n = 2$, bekommen wir 3 Geraden. Was für Möglichkeiten gemeinsamer Punkte gibt es? Vergleiche dazu die folgende Abbildung.



(a) Geraden haben gemeinsamen Schnittpunkt P (b) Geraden haben keinen gemeinsamen Schnittpunkt (c) alle drei Geraden fallen aufeinander

Es gibt die gleichen drei Möglichkeiten wie vorhin! Wie wahrscheinlich sind die verschiedenen Möglichkeiten? Damit Fall (c) eintritt, müssen die Gleichungen dieselben Geraden liefern, m und b der Gerade sind bereits durch eine Gleichung festgelegt. In Fall (a) muss nur P auf jeder Gerade liegen, jede Gleichung kann ein anderes m haben, allerdings ist das zugehörige b dann durch P festgelegt, denn $y_p = mx_p + b$. Im Fall (b) muss nur gelten, dass wir nicht in Fall (a) oder in Fall (c) sind. Fall (b) ist hier also (mit

Abstand) am wahrscheinlichsten (die Gleichungen müssen nahezu keine Bedingungen erfüllen), gefolgt von Fall (a) und dann Fall (c). Es dürfte klar sein, dass es sich gleich verhält, wenn wir 4 oder mehr Geraden, also 4 oder mehr Gleichungen haben. Und auch für mehr als zwei Variablen lässt sich dieses Resultat verallgemeinern. Wir fassen zusammen:

Satz. *Sei n die Anzahl Variablen und m die Anzahl Gleichungen. Dann gilt*

$n > m$**:** *Entweder gibt es unendlich viele Lösungen oder die Gleichungen widersprechen sich und es gibt keine Lösung.*

$n = m$**:** *Meistens gibt es genau eine Lösung, dass es keine oder unendlich viele gibt kann aber auch vorkommen.*

$n < m$**:** *Meistens gibt es gar keine Lösung, dass es genau eine oder unendlich viele gibt kann aber auch vorkommen.*

Wie wahrscheinlich die verschiedenen Fälle genau sind und was es für Unterscheidungskriterien es gibt, sind Dinge, die man in einem fortgeschrittenen Kurs untersuchen könnte, hier würden sie allerdings den Rahmen sprengen.

Lösen von Gleichungssystemen mit n Variablen

Hier erweist sich das Additionsverfahren als die robusteste Methode. Man benutzt alle(!) m Gleichungen, um $m-1$ Gleichungen zu erhalten, die nur noch von $n-1$ Variablen abhängen. Dies tut man solange, bis man nur noch eine Gleichung hat. Wir nehmen die Lösung(en) dieser Gleichung und setzen sie in die anderen Gleichungen ein, um Schritt für Schritt die Werte der anderen Variablen zu erhalten.

Beispiel (für $n = m = 3$)**.** Wir wollen

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 3, && (5)\\ 3x + 2y + z &= 15, && (6)\\ -x + y + 2z &= 6, && (7) \end{aligned}$$

mit dem Additionsverfahren lösen. Wir addiern (5) zu (6) und (5) zweimal zu (7) hinzu (Bem.: Es werden alle drei Gleichungen verwendet!) und erhalten

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 18, && (8)\\ 3x + 3y &= 12. && (9) \end{aligned}$$

Nun multiplizieren wir (9) mit -1 und addieren die Gleichungen. Wir erhalten $2x = 6$ und somit $x = 3$. Dies setzen wir in (8) oder (9) ein und erhalten $y = 1$. Nun setzen wir x und y in eine der ursprünglichen drei Gleichungen ein und erhalten $z = 4$.

14 Vektoren

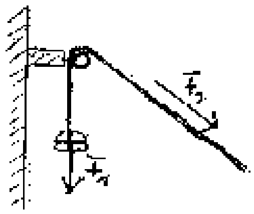
Der Begriff des Vektors

Vektoren sind gerichtete Grössen, also Gegenstände, die neben einer Grösse auch noch eine Richtung haben. Bislang haben wir nur mit skalaren Grössen gearbeitet, Gegenständen, die nur eine Grösse haben.

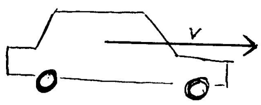
Beispiele für skalare Grössen: Temperatur, Gewicht, Höhe.

Beispiele für Vektoren:

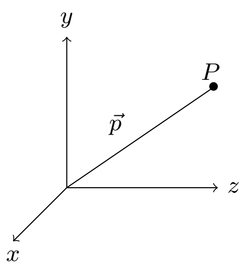
- Kraft: Einerseits hat eine Kraft eine Stärke, andererseits eine Richtung in der sie wirkt.



- Bewegung: Einerseits hat eine Bewegung eine Geschwindigkeit, andererseits eine Richtung in der sie stattfindet. Oder, ein wenig abstrakter:



- Punkte im Raum: Einerseits haben sie einen Abstand vom Ursprung, andererseits eine Richtung, in der sie liegen.



Darstellung von Vektoren

Vektoren werden meist als Türme von Zahlen, manchmal auch als Zeilen beschrieben. Im ersten Fall spricht man von *Spaltenvektoren* und im zweiten Fall von *Zeilenvektoren*.

Beispiel.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3/10 \\ 4.001 \end{pmatrix} \text{ oder auch } (5, 1, 8)$$

oder, etwas abstrakter

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

oftmals aber auch abgekürzt mit Pfeil, z.B.: $\vec{v}, \vec{a}$. Wenn wir einen Vektor $\vec{a}$ haben, so schreiben wir ihn explizit als

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Die a_i bezeichnet man als *Koordinaten*.

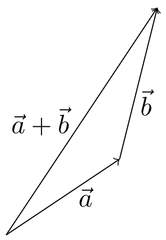
Operationen mit Vektoren

Was kann man mit Vektoren tun?

- Addieren:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}.$$

Man sagt auch: Die Vektoren werden koordinatenweise addiert.



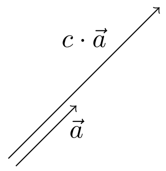
Beispiel.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- Mit einem Skalar multiplizieren:

$$c \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \\ c \cdot a_3 \end{pmatrix},$$

wobei c eine ganz normale Zahl ist. Später werden wir statt $c \cdot \vec{a}$ nur noch $c\vec{a}$ schreiben.



Beispiel.

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 28 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

- Skalarprodukt: Zwei Vektoren werden multipliziert und liefern uns ein Skalar:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$$

Beispiel.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 9 = 46.$$

- Betrag nehmen (der Betrag wird auch *Länge* des Vektors genannt):

$$|\vec{a}| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \text{ wenn } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Beachte: Wegen dem Skalarprodukt gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

und somit

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

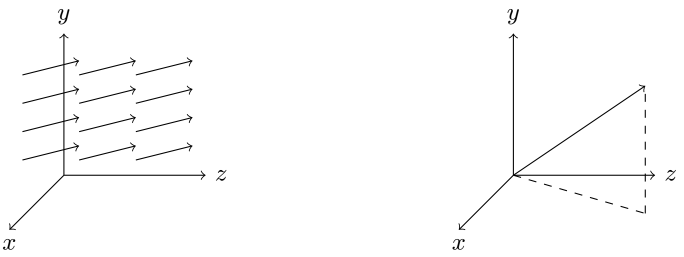
Beispiel. Sei $\vec{a} = (3, 4, 0)$. Dann ist

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5.$$

- Normieren: Dies bedeutet den Vektor zu einem Vektor gleicher Richtung, aber der Länge 1 machen,

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} := \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}.$$

Je nachdem, woran wir arbeiten, lohnt es sich, Vektoren frei im Raum oder, indem man einen Ursprung wählt, relativ zueinander zu betrachten. "Freie" Vektoren bezeichnet man als Richtungsvektoren, an einen Ursprung gebundene als Ortsvektoren.

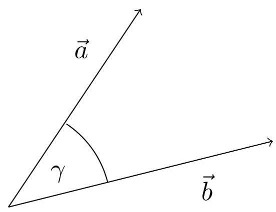


(a) Richtungsvektor (b) Ortsvektor

Wie bestimmt man den Winkel zwischen zwei Vektoren? Mit Hilfe des Skalarprodukts! Es gilt die

Formel zur Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren. *Seien $\vec{a}$,$\vec{b}$ zwei Vektoren und γ der von ihnen eingeschlossene Winkel. Dann gilt*

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \cos\gamma.$$



15 Geraden in Ebene und Raum

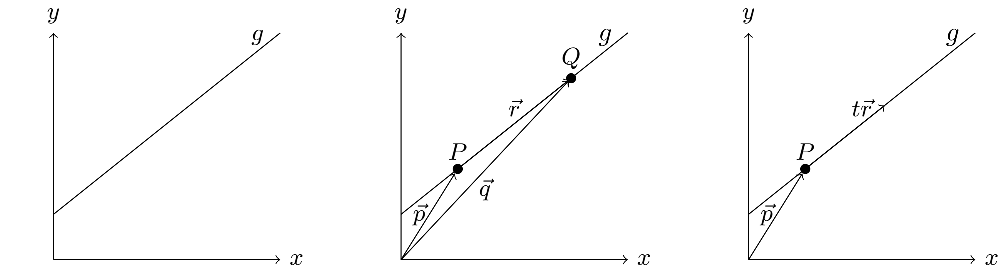
In der Ebene

Wir haben gesehen, dass Geraden in der Ebene durch Gleichungen der Form $y = mx+b$ beschrieben werden können, wobei m die Steigung und b der y-Achsenabschnitt sind. Nun wollen wir Geraden durch Vektoren ausdrücken. Dazu nehmen wir einen beliebigen Punkt $\vec{p}$ auf der Geraden g. Sei nun $\vec{q}$ ein anderer Punkt von g und $\vec{r} = \vec{q}-\vec{p}$ der Vektor von $\vec{p}$ nach $\vec{q}$. Nun sieht man, dass alle Punkte von g durch Vielfache von $\vec{r}$, angehängt an $\vec{p}$, beschrieben werden:

$$g = \{\vec{p} + t\vec{r} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

oder expliziter: Sei (x, y) ein Punkt in g. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \vec{p} + t\vec{r} \quad \text{für ein } t \in \mathbb{R}.$$



(a) Gerade durch Gleichung $y = mx + b$ gegeben.

(b) Gerade mit zwei Punkten P, Q und $\vec{r}$.

(c) Gerade durch Vektoren gegeben.

Beispiel. Wir wollen die Gerade g, gegeben durch $y = 2x + 5$, mittels Vektoren darstellen. Dazu brauchen wir zwei Punkte auf g. Als Erstes nehmen wir den Punkt $\vec{p}$ mit $x = 1$. Die Gleichung liefert $\vec{p} = (1, 7)$. Dann nehmen wir $\vec{q}$ mit $x = 2$. Wir erhalten $\vec{q} = (2, 9)$. Wir bilden $\vec{r} = \vec{q} - \vec{p} = (2, 9) - (1, 7) = (1, 2)$. Nun sind die Punkte von g gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{p} + t\vec{r} \quad \text{für ein } t \in \mathbb{R}.$$

Wir überprüfen die Richtigkeit unserer Darstellung, in dem wir sie in die Geradengleichung einsetzen:

$$y = 2x + 5 = 2(1 + t) + 5 = 2 + 2t + 5 = 7 + 2t \qquad \checkmark$$

Also erfüllen die Punkte für alle t die Gleichung.

Im dreidimensionalen Raum

Nun gehen wir in den dreidimensionalen Raum. Hier gibt es keine einfache Beschreibung, wie in der Ebene, mehr. Aber mit Vektoren klappt es. Gleich wie in zwei Dimensionen wählen wir $\vec{p}$, $\vec{q}$ und somit $\vec{r}$ und alles läuft genau gleich, ausser dass die Vektoren jetzt *drei* statt *zwei* Koordinaten haben. Die Gerade g wird wiederum beschrieben durch

$$g = \{\vec{p} + t\vec{r} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Diese Darstellung von Geraden durch Vektoren wird als *Parameterdarstellung* bezeichnet, wobei die Variable t der *Parameter* ist. Zu jedem Punkt auf der Geraden gehört genau ein Wert des Parameters. Ferner bezeichnet man $\vec{r}$ als den *Richtungsvektor der Geraden*. Notation: Ist g in Parameterdarstellung gegeben, so schreibt man kurz $g : \vec{p}_g + t\vec{r}_g$.

Anwendungen

Nun können wir verschiedene Probleme mit Geraden angehen, zum Beispiel:

- Liegt ein gegebener Punkt $\vec{a}$ auf der Geraden g?
- Beschreibe die Gerade g, die durch die Punkte $\vec{a}$ und $\vec{b}$ geht.

Beispiel. Wir wollen eine Aufgabe des ersten Typs lösen. Seien die Punkte von g gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen überprüfen, ob $\vec{q} = (16, 10, 14)$ auf g liegt. Damit der Parameter t auf der x-Koordinate den richtigen Wert liefert, muss er den Wert 2 haben, also gilt $t = 2$. Warum? Für das gesuchte t muss gelten $2 + 7t = x = q_1 = 16$. Nun überprüfen wir, ob das auf den anderen Koordinaten für dieses t auch stimmt. Und tatsächlich: $y = 4 + 2 \cdot 3 = 10 = q_2$ und $z = 6 + 2 \cdot 4 = 14 = q_3$. Also liegt $\vec{q}$ auf g.

Lagen von Geraden im Raum

Was für Lagen können zwei Geraden g und h im Raum zueinander haben? Es gibt vier Arten:

(a) sich schneidend, d.h. g und h haben genau einen gemeinsamen Punkt,

(b) kollinear (parallel), d.h. g und h haben die gleiche Richtung,

(c) zusammenfallend, d.h. $g = h$,

(d) windschief: g und h schneiden sich nicht und haben nicht die gleiche Richtung.

Man beachte, dass Fall (c) ein Spezialfall von Fall (b) ist. Damit ergeben sich weitere Probleme:

- Was für eine Lage haben zwei gegebene Geraden g und h zueinander?
- Falls sich g und h schneiden, wo ist der Schnittpunkt?
- Finde eine Gerade h durch einen Punkt $\vec{p}$, so dass h parallel zu einer gegebenen Gerade g ist.

Wie geht man solche Probleme an?

Kriterien für die Bestimmung von Lagen. *Es seien zwei Geraden $g : \vec{p}_g + t\vec{r}_g$ und $h : \vec{p}_h + s\vec{r}_h$ gegeben. Dann gilt*

1. *g und h sind kollinear $\iff$ r_g ist ein Vielfaches von r_h, d.h. es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ so dass $r_g = \lambda r_h$.*
2. *g und h schneiden sich $\iff$ Es gibt genau ein $t \in \mathbb{R}$ und auch genau ein $s \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{p}_g + t\vec{r}_g = \vec{p}_h + s\vec{r}_h$.*

Man beachte, dass wir uns, wenn es unendlich viele t und s gibt, die das Gleichungssystem lösen, in Fall (c) befinden und das Kriterium von 1 automatisch erfüllt ist. Wenn es genau eine Lösung gibt, so befinden wir uns in Fall (a). In diesem Fall kann man nach dem Winkel zwischen den beiden Geraden fragen. Mit Hilfe der Skalarproduktformel findet man ihn leicht:

Satz (Winkel zwischen zwei Geraden)**.** *Es seien $g : \vec{p_g} + t\vec{r_g}$ und $h : \vec{p_h} + s\vec{r_h}$ gegeben. Dann gilt für den Winkel γ zwischen g und h*

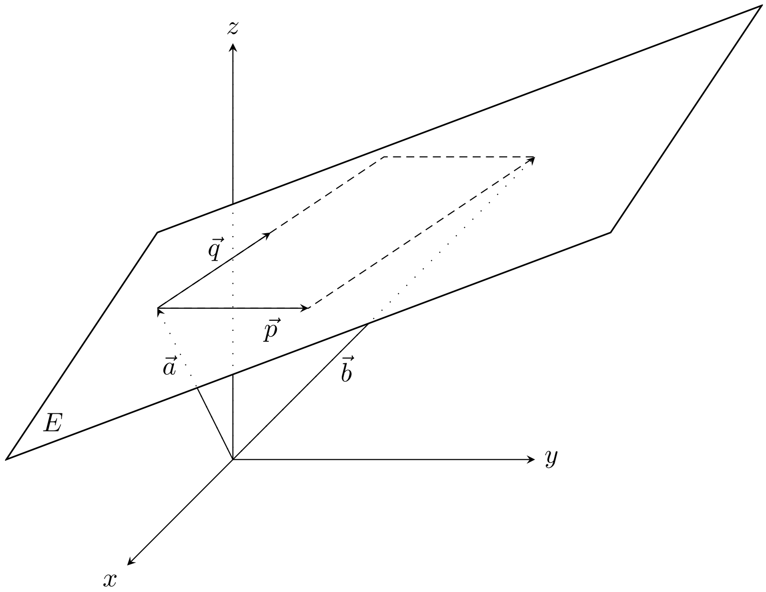
$$\cos\gamma = \frac{\vec{r_g} \cdot \vec{r_h}}{|\vec{r_g}| \cdot |\vec{r_h}|}.$$

16 Ebenen im Raum

Darstellungen

Parameterdarstellung

Sei E eine Ebene im Raum. Wir wollen sie durch Vektoren beschreiben. Dazu wählen wir einen Punkt $\vec{a}$ auf der Ebene und die Richtungsvektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$ von zwei nicht gleichgerichteten Geraden in E, die durch $\vec{a}$ gehen.



Anhand des Bilds sehen wir, dass ein beliebiger Punkt $\vec{b}$ von E durch Vielfache von $\vec{p}$ und $\vec{q}$, angehängt an $\vec{a}$, beschrieben werden kann. Somit gilt

$$E = \{\vec{a} + t\vec{p} + s\vec{q} \mid t, s \in \mathbb{R}\},$$

oder expliziter: Sei (x, y, z) ein Punkt in E. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \vec{a} + t\vec{p} + s\vec{q} \quad \text{für je ein } t, s \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Analog zu der Parameterdarstellung für Geraden schreiben wir, wenn E wie oben gegeben ist, kurz $E : \vec{a} + t\vec{p} + s\vec{q}$.

Beispiel. Wir wollen die x-y-Ebene darstellen. Als $\vec{a}$ wählen wir den Ursprung $(0, 0, 0)$. Eine Gerade, die in der x-y-Ebene liegt, ist die x-Achse. Ein möglicher Richtungsvektor für sie ist $(1, 0, 0)$. Eine andere, nicht gleichgerichtete Gerade ist die y-Achse. Als ihren Richtungsvektor können wir $(0, 1, 0)$ nehmen. Also bilden folgende Punkte die x-y-Ebene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t, s \in \mathbb{R}.$$

Wie sehen denn t und s konkret für einen Punkt aus? Wir nehmen zum Beispiel den Punkt $(3, 4, 0)$. Wir wollen t und s so finden, dass

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt und sehen schnell, dass wir dies *ausschliesslich* mit $t = 3$ und $s = 4$ erhalten.

Koordinatendarstellung

Gleichung (1) können wir als drei Gleichungen in den Variablen t und s auffassen:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + p_1 t + q_1 s, \\ y &= a_2 + p_2 t + q_2 s, \\ z &= a_3 + p_3 t + q_3 s. \end{aligned}$$

Durch Elimination von t und s erhalten wir eine Gleichung in x, y, z der Form

$$Ax + By + Cz = D \quad \text{mit } A, B, C, D \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

die jeder Punkt in E erfüllt. Umgekehrt kann man verifizieren, dass jeder Punkt (x, y, z), der (2) erfüllt, in E liegt. Wir haben analog zur Geradengleichung in der Ebene eine einfache Gleichung gefunden, deren Lösungsmenge eine Ebene im Raum ist.

Beispiel. Sei E gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t, s \in \mathbb{R}.$$

In Gleichungen übersetzt:

$$\begin{aligned} x &= 1 - 1 \cdot t - 1 \cdot s = 1 - t - s, \\ y &= 0 + 1 \cdot t + 0 \cdot s = t, \\ z &= 0 + 0 \cdot t + 1 \cdot s = s. \end{aligned}$$

Wir addieren die zweite Gleichung zur ersten hinzu. Übrig bleibt

$$\begin{aligned} x + y &= 1 - s, \\ z &= s. \end{aligned}$$

Weiter addieren wir die neue zweite Gleichung zur neuen ersten hinzu. Dies liefert

$$x + y + z = 1.$$

Also haben wir wie gewünscht eine Gleichung der Form (2) mit $A = B = C = D = 1$ erhalten.

Begriffe

Wir haben nun also zwei Darstellungen der Ebene im Raum, einerseits mit Vektoren, andererseits als Lösungsmenge einer Gleichung. Erstere heisst *Parameterdarstellung*, wobei t, s als *Parameter* bezeichnet werden; letztere *Koordinatendarstellung*, wobei die Gleichung selbst als *Koordinatengleichung* bezeichnet wird.

Anwendungen

Mit diesen Werkzeugen lassen sich folgende Probleme bearbeiten:

- Liegt ein gegebener Punkt $\vec{p}$ in einer gegebenen Ebene E?
- Finde die Parameter-/Koordinatendarstellung der Ebene durch die Punkte $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
- Finde die Parameter-/Koordinatendarstellung der Ebene, die eine gegebene Gerade g und einen Punkt $\vec{p}$ enthält.
- Wo schneidet eine Gerade g, die nicht in einer Ebene E selbst liegt, diese Ebene?
- Finde die Schnittgerade zweier nicht paralleler Ebenen E_1 und E_2.

Beispiel. Als Beispiel wollen wir eine Aufgabe des vierten Typs lösen. Wir wollen die Gerade, die durch $(2, 1, 2)$ und $(1, 2, 1)$ geht mit der Ebene E von vorhin, gegeben durch $x + y + z = 1$, schneiden. Die Gerade ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}.$$

Wir setzen x, y und z in die Gleichung von E ein:

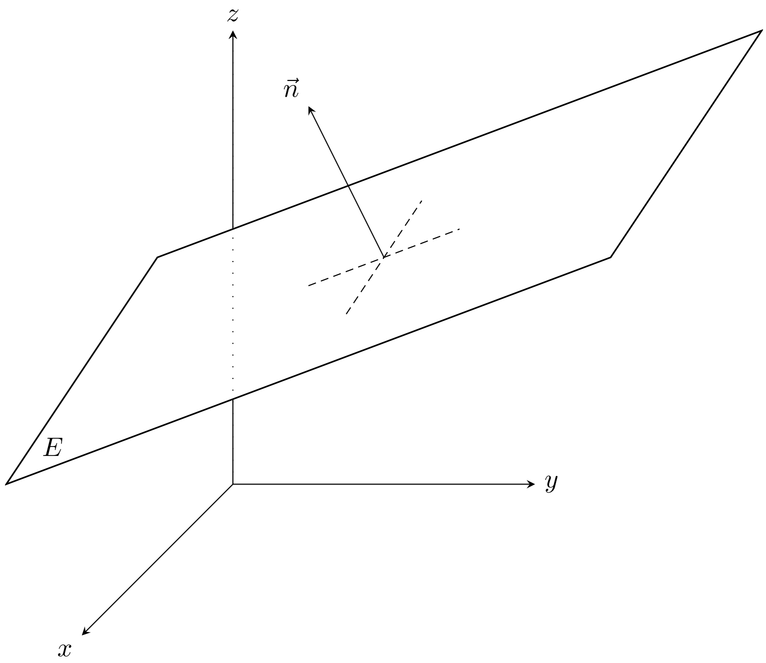
$$(2-t)+(1+t)+(2-t)=1.$$

Dies führt auf $t=4$. Wir setzen 4 als Parameter der Gerade ein. Dies gibt uns den Schnittpunkt $(-2,5,-2)$. Wir überprüfen ob dieser Punkt tatsächlich in der Ebene liegt:

$$x+y+z=-2+5-2=1 \qquad \checkmark$$

Normalenvektor

Anschaulich ist klar, dass es (bis auf Vielfache) genau einen Richtungsvektor $\vec{n}$ gibt, der senkrecht auf alle in einer Ebene liegenden Vektoren steht. Diesen Vektor nennt man *Normalenvektor*, er steht *normal*, d.h. senkrecht, auf der Ebene.



Man kann zeigen, dass folgende Formel gilt:

Berechnung des Normalenvektors. *Sei E durch $Ax+By+Cz=D$ gegeben. Dann ist*

$$\vec{n}=(A,B,C)$$

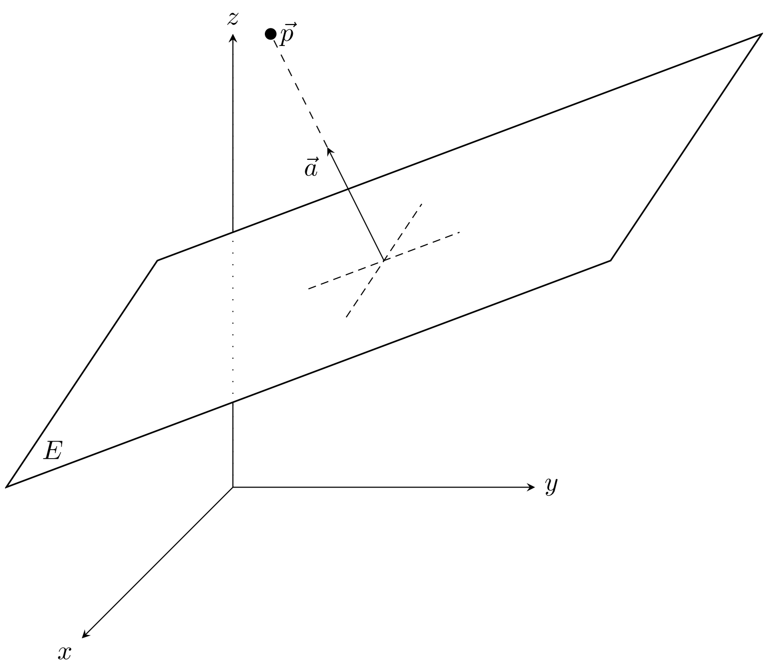
ein Normalenvektor von E.

Anwendungen

Wie bestimmt man den Winkel zwischen zwei Ebenen E_1, E_2?

Satz (Winkel zwischen zwei Ebenen)**.** *Seien E_1, E_2 zwei nichtparallele Ebenen. Dann ist der Winkel zwischen den beiden Ebenen genau derjenige zwischen den beiden Normalenvektoren (diesen Winkel kann man mit dem Skalarprodukt berechnen, die Formel dazu steht auf Seite 42).*

Ein weiteres Problem: Wie bestimmt man den Abstand eines Punkts $\vec{p}$ von einer Ebene E? Dieses Resultat wollen wir herleiten. Wieder kommt uns der Normalenvektor zu Hilfe. Sei $\vec{a} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ der normierte Normalenvektor. Gesucht ist der Betrag des Vielfachen von $\vec{a}$, welches $\vec{p}$ und E verbindet.



Wir müssen die Gerade durch $\vec{p}$, die in Richtung $\vec{a}$ zeigt, mit E schneiden. Oder abstrakter: Finde t so dass $\vec{p} + t \cdot \vec{a}$ in E liegt, also die Gleichung $Ax + By + Cz = D$ von E erfüllt. Zur Erinnerung:

$$\vec{a} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \text{ , wobei } \vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \text{ und somit } |\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Wir setzen die Gerade in die Gleichung ein:

$$A(p_1 + t\frac{A}{|\vec{n}|}) + B(p_2 + t\frac{B}{|\vec{n}|}) + C(p_3 + t\frac{C}{|\vec{n}|}) = D.$$

Umgeschrieben gibt das

$$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + \frac{(A^2 + B^2 + C^2)}{|\vec{n}|}t = D.$$

Nun ist

$$\frac{(A^2 + B^2 + C^2)}{|\vec{n}|} = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = |\vec{n}|,$$

also

$$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + |\vec{n}|t = D,$$

und so

$$t = \frac{D - (Ap_1 + Bp_2 + Cp_3)}{|\vec{n}|} = \frac{D - (Ap_1 + Bp_2 + Cp_3)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Und weil der Abstand positiv ist, nehmen wir den Betrag hiervon:

$$t = \frac{|D - (Ap_1 + Bp_2 + Cp_3)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

wobei die letzte Umformung nur aus ästhetischen Gründen getätigt wurde. Wir haben folgenden Satz bewiesen:

Satz (Abstand zwischen Punkt und Ebene)**.** *Sei $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ ein beliebiger Punkt im Raum. Für den Abstand d zwischen $\vec{p}$ und der Ebene E, definiert durch $Ax + By + Cz = D$, gilt dann*

$$d = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{1}$$

Formel (1) wird als *Hessesche Normalenform* bezeichnet.

17 Kombinatorik

In der Kombinatorik geht es ums Zählen von Möglichkeiten. Alle hier vorgestellten Formeln lassen sich von einer einzigen Formel, der sogenannten *Produktregel der Kombinatorik*, herleiten. Grundsätzlich reicht es somit aus, sich diese eine Formel zu merken.

Produktregel

Wir illustrieren die Formel an einem einfachen Beispiel.

Beispiel (Der Weg nach Hause)**.** Max ist an der Uni (U) und will nach Hause (H). Auf dem Nachhauseweg will er noch ein Buch kaufen. Von der Uni zur Buchhandlung (B) gibt es 3 und von der Buchhandlung nach Hause 4 verschiedene Wege. Wieviele verschiedene Möglichkeiten hat Max, um nach Hause zu kommen?

Max kann sich zweimal entscheiden. Diese Entscheidungspunkte nennen wir Stufen. Es handelt sich also um einen zweistufigen Entscheidungsprozess. Auf der ersten Stufe (Weg von der Uni zur Buchhandlung) hat Max $n_1 = 3$ Möglichkeiten. Für jeden der drei Wege gibt es $n_2 = 4$ mögliche Fortsetzungen (Weg von der Buchhandlung nach Hause). Insgesamt gibt es also $n_1 \cdot n_2 = 3 \cdot 4 = 12$ verschiedene Wege. Die Anzahl der Möglichkeiten auf den verschiedenen Stufen werden miteinander multipliziert. Dies ist auch schon die gesuchte Regel.

Produktregel der Kombinatorik. *In einem Entscheidungsprozess mit k Stufen habe man auf der ersten Stufe n_1, auf der zweiten Stufe n_2, und so weiter und schliesslich auf der k–ten Stufe n_k Möglichkeiten. So hat dieser Entscheidungsprozess insgesamt*

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

mögliche Ergebnisse.

Es folgt noch ein Beispiel zur Produktregel:

Beispiel (Auswahl)**.** Auf wieviele Arten kann man eine Auswahl aus zehn verschiedenen Gegenständen treffen? Dabei können beliebig viele Gegenstände (sogar keine oder alle zehn) ausgewählt werden.

Jeder einzelne Gegenstand kann entweder ausgewählt oder nicht ausgewählt werden. Für jeden der zehn Gegenständ haben wir zwei Möglichkeiten und somit insgesamt

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10} = 1024$$

verschiedene Möglichkeiten eine Auswahl zu treffen.

Permutation

Beispiel (100m-Sprint (zum Ersten))**.** Beim 100m-Sprint-Finale starten acht Läufer. Wie viele verschiedene Zieleinläufe sind möglich? (Wir schliessen aus, dass zwei Läufer genau gleich schnell sind.)

Wieviele mögliche Sieger gibt es? Natürlich acht. Den zweiten Platz kann der Sieger nicht auch noch belegen und somit gibt es nur noch sieben mögliche Zweitplatzierte. Für den dritten Platz gibt es noch sechs Möglichkeiten und so weiter. Wir wenden die Produktregel an und schliessen, dass es

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$$

mögliche Zieleinläufe gibt. Diese Aufgabe kann folgendermassen verallgemeinert werden. Wir wollen n verschiedenen Dinge anordnen, das heisst, sie in eine Reihenfolge bringen. Eine solche Reihenfolge nennen wir *Permutation.* Mit derselben Überlegung wie im Beispiel sehen wir, dass es $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten gibt, dies zu tun. Um dieses Produkt nicht immer ausschreiben zu müssen, führen wir die folgende Notation ein:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1. \qquad \text{(Sprechweise: „}n\text{ Fakultät“)}$$

Wir können nun unsere Erkenntnis in folgendem Satz zusammenfassen:

Permutation ohne Wiederholung. *Es gibt $n!$ Permutationen von n verschiedenen Elementen.*

Bis jetzt sind wir immer davon ausgegangen, dass wir verschiedene Dinge anordnen wollen. Dies ändern wir nun:

Beispiel (TATET)**.** Wieviele verschiedene Wörter kann man aus den Buchstaben T A T E T bilden?

Wir stellen uns zunächst vor die Ts seien verscheiden (z.B. **T**, T, $\mathbb{T}$). Dies ist nun eine Permutation ohne Wiederholung und es gibt $5! = 120$ verschiedene Wörter. Wir fragen uns jetzt auf wie viele Arten wir das Wort TATET schreiben können. Da wir nur die drei Ts anordnen müssen, ist dies wieder eine Permutation ohne Wiederholung und es gibt daher $3! = 6$ Möglichkeiten. Diese Überlegung gilt nicht nicht nur für das Wort TATET, sondern für jedes Wort mit diesen Buchstaben. In einer Auflistung aller 120 Wörter kommt also jedes Wort sechs mal vor. Wir schliessen daraus: Es gibt

$$\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

verschiedene Wörter mit den Buchstaben T A T E T. Auch dieses Ergebnis kann verallgemeinert werden.

Permutation mit Wiederholung. *Haben wir n_1 ununterscheidbare Elemente einer Art, n_2 ununterscheidbare Elemente einer zweiten Art, und so weiter und schliesslich n_k ununterscheidbare Elemente einer k–ten Art und sei n die Anzahl aller Elemente (d.h. $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$), so gibt es*

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots n_k!}$$

Möglichkeiten, diese Elemente anzuordnen.

Variation

Unter einer *Variation ohne Wiederholung* verstehen wir ebenfalls eine Anordnung, bei welcher die anzuordnenden Elemente nicht mehrfach verwendet werden dürfen. Der Unterschied zur Permutation besteht daran, dass nicht alle Elemente angeordnet werden, sondern nur ein Teil davon.

Beispiel (100m-Sprint (zum Zweiten))**.** Wie viele verschiedene Podestbesetzungen sind mit 8 Läufern möglich?

Wir können dieses Problem auf zwei Arten lösen. Erstens, direkt mit der Produktregel. Der erste Platz kann von acht, der zweite von sieben und der dritte Platz von 6 Läufern belegt werden. Es gibt also $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ mögliche Podestbesetzungen. Hier haben wir die Läufer auf die Plätze verteilt. Wir können aber auch anders herum vorgehen und die Plätze auf die Läufer verteilen. Wir stellen uns dazu die Läufer auf einer Reihe aufgestellt vor. Und wir verteilen folgende Plätze: 1., 2., 3. und fünf andere. So betrachtet, haben wir eine Permutation mit Wiederholung und können das Problem mit der angegebenen Formel lösen. Es gibt

$$\frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

mögliche Podestbesetzungen. Der folgende Satz ergibt sich genau aus dieser Überlegung.

Variation ohne Wiederholung. *Es sei $n \geq k$. Es gibt dann*

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Möglichkeiten k Elemente aus einer Menge mit n Elementen anzuordnen.

Auch bei Variationen können wir Wiederholungen zulassen. Ein Beispiel dafür sieht folgendermassen aus:

Beispiel (100m-Sprint (zum Dritten und Letzten))**.** Zwei Länder veranstalten unter sich einen Wettkampf. Dafür schickt jedes Land seine vier besten 100m-Sprinter an den Start. Bei der Siegerehrung werden die jeweiligen Landesflaggen der Medalliengewinner gehisst, (die des Siegers am höchsten, die des Zweiten etwas niedriger und die des Dritten noch etwas tiefer). Wieviele mögliche Fahnenbilder gibt es bei der Siegerehrung?

In diesem Beispiel kann man direkt die Produktregel anwenden: Es gibt zwei Möglichkeiten aus welchem Land der Sieger stammt. Dies gilt ebenfalls für den Zweit- und für den Drittplatzierten. Daher gibt es insgesamt:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$$

mögliche Arten die Landesflaggen zu hissen. Zusammengefasst gilt also

Variation mit Wiederholung. *Es gibt n^k Möglichkeiten aus n Elementen k-mal nacheinander ein bestimmtes Element zu wählen, wobei bei jeder Wahl alle n Elemente zur Verfügung stehen.*

Kombination

Bei vielen Aufgabenstellungen spielt die Reihenfolge keine Rolle. Diesen Fall wollen wir jetzt behandeln. Wiederum betrachten wir zuerst ein Beispiel.

Beispiel (Regierungswahlen)**.** Bei den Wahlen in die Regierung sind sieben Sitze zu vergeben. Für diese Sitze kandidieren jedoch elf Personen. Wie viele verschiedene Zusammensetzungen für die Regierung sind möglich?

Wie zuvor verteilen wir nicht die Personen auf die Sitze, sondern die Sitze auf die Personen. Wir stellen uns dafür die Kandidaten wieder in einer Reihe aufgestellt vor. Wer gewählt ist, bekommt einen Zettel mit einem X darauf, wer es nicht geschafft hat jedoch ein O. Die Anzahl der möglichen Regierungen entspricht also der Anzahl der Wörter die wir mit sieben Xen und vier Os schreiben können. Dies ist jedoch wieder eine Permutation mit Wiederholung und daher können wir folgern: Es gibt

$$\frac{11!}{7! \cdot (11-7)!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{(\cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = 330$$

verschiedene Zusammensetzungen für die Regierung. Wir fassen unsere Überlegungen zusammen und erhalten:

Kombination ohne Wiederholung. *Es sei $n \geq k$. Aus n verschiedenen Elementen kann man auf $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ verschiedene Arten k davon auswählen.*

Für den Bruch $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ führen nochmals eine vereinfachende Notation ein:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}. \qquad \text{(Sprechweise: „}n\text{ über }k\text{“)}$$

Der letzte Aufgabentyp ist der schwierigste. Doch auch er kann auf eine Permutation mit Wiederholung und somit auf die Produktregel zurückgeführt werden.

Beispiel (Erbteilung)**.** Max, Nora und Karl haben zusammen fünf identische Perlen geerbt. Auf wie viele Arten können die Perlen verteilt werden?

Um die Aufgabe zu lösen, stellen wir uns vor, dass Max, Nora und Karl jeweils eine Schachtel mitbringen und diese nebeneinander stellen. Die Perlen werden jetzt in die entsprechenden Schachteln gelegt. Schematisch können wir dies wie folgt darstellen:

M	N	K
o	oo	oo

Max bekommt eine,
Nora und Karl je zwei Perlen

M	N	K
oooo		o

Max bekommt vier,
Nora keine und Karl eine Perle

Betrachten wir nur den unteren Teil der Abbildung, erkennen wir, dass wir eigentlich fünf Perlen und zwei Trennwände anordnen müssen. Dafür gibt es

$$\frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{(\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}) \cdot (2 \cdot 1)} = 21$$

Möglichkeiten. Zusammengefasst erhalten wir:

Kombination mit Wiederholung. *n gleiche Elemente kann man auf*

$$\frac{(n+k-1)!}{n! \cdot (k-1)!} = \binom{n+k-1}{n}$$

verschiedene Arten k Klassen zuteilen.

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem weiteren Beispiel:

Beispiel (Würfeln)**.** Wie viele verschiedene Würfe sind mit zwei gleichen Würfeln möglich?

Auch hier handelt es sich um eine Kombination mit Wiederholungen. Wir teilen nämlich die zwei Würfel (d.h. $n = 2$) den Zahlen eins bis sechs zu (d.h. $k = 6$). Hier sind die Zahlen also die genannten Klassen. Somit gibt es

$$\binom{2+6-1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$$

verschiedene Würfe.

18 Wahrscheinlichkeitslehre

Ein Basketballspieler treffe durchschnittlich 3 von 4 Freiwürfen. Wie gross ist seine Treffwahrscheinlichkeit? Sie beträgt

$$\frac{3}{4} = 0.75 = 75\%.$$

Dieses einleitende Beispiel zeigt, dass wir alle eine Vorstellung von Wahrscheinlichkeiten haben. Das Beispiel motiviert auch die folgende Formel:

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}}.$$

Etwas mathematischer ausgedrückt wird dies zu:

$$P(A) = \frac{N_A}{N}, \tag{1}$$

wobei wir mit $P(A)$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnen, dass das Ereignis A eintritt. N_A ist die Anzahl der günstigen Fälle. Das sind diejenigen Fälle, in welchen A eingetreten ist. Mit N bezeichnen wir die Anzahl aller möglichen Fälle. Dies ist die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit. Heutzutage wird in der Mathematik anders definiert, was Wahrscheinlichkeit ist. Doch die klassische Definition reicht für unsere Zwecke aus. Wir nennen die Gleichung (1) deshalb auch *Grundformel der Wahrscheinlichkeitsrechnung.*

Beispiel (Würfeln (zum ersten))**.** Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf mit einem normalen Würfel eine gerade Zahl zu würfeln?

"Gerade Zahl gewürfelt" ist das Ereignis A. Der Würfel kann eine Eins bis Sechs zeigen. Wir haben also sechs mögliche Fälle, das heisst $N = 6$. Davon sind drei (2, 4 und 6) gerade. Wir haben also drei günstige Fälle, das heisst $N_A = 3$. Somit gilt:

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Aus der Grundformel kann man direkt einige Folgerungen ziehen. Dazu fragen wir uns wie gross N_A ist. Im einen Extrem tritt das Ereignis A nie ein. Wir sprechen dann von einem unmöglichen Ereignis und es gilt $N_A = 0$. Im anderen Extrem tritt das Ereignis A immer ein. Dann sprechen wir von einem sicheren Ereignis und es gilt $N_A = N$. Für die Wahrscheinlichkeit bedeutet dies

$$0 = \frac{0}{N} \leq P(A) \leq \frac{N}{N} = 1.$$

Die zweite Folgerung ist das *Prinzip der Gegenwahrscheinlichkeit*. Sei A wieder irgendein Ereignis. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, das A nicht eintritt? Für das Ereignis "nicht A" schreiben wir auch A^C (Sprechweise: "A Komplement"). Die folgende Gleichung liefert die Antwort;

$$P(A^C) = P(\text{"nicht } A\text{"}) = \frac{N_{\text{nicht } A}}{N} = \frac{N - N_A}{N} = 1 - \frac{N_A}{N} = 1 - P(A).$$

Folgerungen aus der Grundformel.

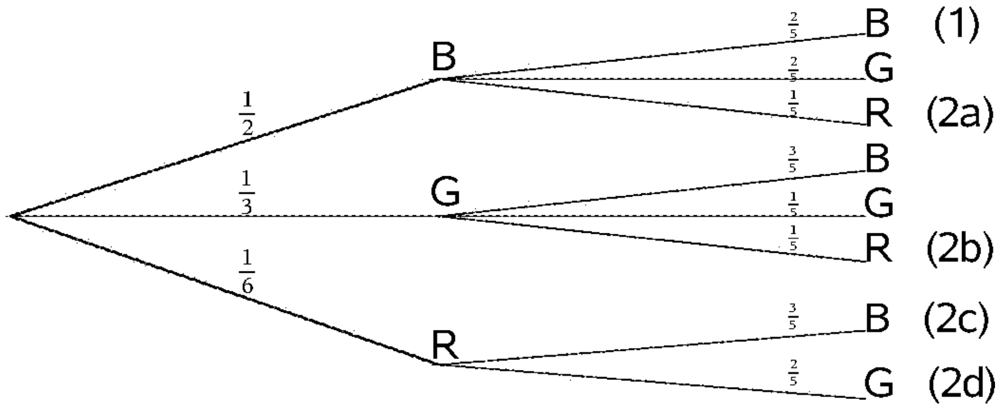
$$\begin{aligned} 0 \leq P(A) \leq 1 & \qquad \textit{für alle Ereignisse } A \\ P(A^C) = 1 - P(A) & \qquad \textit{Prinzip der Gegenwahrscheinlichkeit} \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeitsbäume

Wahrscheinlichkeitsbäume sind ein einfaches Mittel um die Wahrscheinlichkeit in einem mehrstufigen Prozess zu ermitteln. Das folgende Beispiel zeigt, wie solche Bäume zu erstellen und zu gebrauchen sind.

Beispiel. In einer Urne befinden sich drei blaue, zwei gelbe und eine rote Kugel. Es werden nacheinander zwei Kugeln gezogen, ohne dass die erste Kugel wieder zurückgelegt wird.

1. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, zwei blaue Kugeln zu ziehen?
2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die rote Kugeln gezogen wird (egal ob im ersten oder im zweiten Zug)?



Die Verzweigungs- und die Endpunkte nennen wir Knoten und die Strecken zwischen zwei Knoten Äste. Über jeden Ast wird die Wahrscheinlichkeit geschrieben, mit welcher er gewählt wird. Die Antworten auf die Fragen findet man wie folgt. Erstens sucht man alle Endpunkte, bei welchen das gefragte Ereignis eingetreten ist. Für die erste Frage ist dies nur ein einzelner Endpunkt (im Diagramm mit (1) markiert). Die Wahrscheinlichkeit dorthin zu gelangen erhält man, indem man die einzelnen Wahrscheinlichkeiten der Äste auf dem Weg zu diesem Endpunkt miteinander multipliziert. Die Wahrscheinlichkeit zwei blaue Kugeln zu ziehen ist also

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Zur Beantwortung der zweiten Frage geht man genau gleich vor. Man sucht wieder die Endpunkte, bei welchen das gefragte Ereignis eingetroffen ist. Wir haben hier nicht mehr nur einen, sondern vier solche Endpunkte (im Diagramm mit (2a) bis (2d) markiert). Die Wahrscheinlichkeit für einen Endpunkt findet man wie vorhin. Die Wahrscheinlichkeit für das gesamte Ereignis ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Endpunkte. Die Wahrscheinlichkeit, dass die rote Kugel gezogen wird beträgt also

$$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}_{(2a)}+\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}_{(2b)}+\underbrace{\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}}_{(2c)}+\underbrace{\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}}_{(2d)}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

Beispiel (Würfeln (zum Zweiten))**.** Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Wurf mit einem normalen Würfel eine gerade Zahl gewürfelt wurde, wenn wir wissen, dass die gewürfelte Zahl grösser als drei ist?

Wir bezeichnen mit A wiederum das Ereignis, dass die gewürfelte Zahl gerade ist, und mit B bezeichnen wir das Ereignis, dass die gewürfelte Zahl grösser als drei ist. Berechnen wollen wir die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, wenn wir wissen, dass B eingetreten ist. Dafür schreiben wir:

$$P(A|B) \qquad \text{(Sprechweise: “Wahrscheinlichkeit von } A \text{ gegeben } B\text{”).}$$

Dazu wenden wir die Grundformel an. Wir wissen, dass die gewürfelte Zahl grösser als drei ist. Daher kommen nur die Zahlen vier, fünf oder sechs als mögliche Würfelergebnisse in Frage. Wir haben also drei mögliche Fälle. Dies ist in unserer Schreibweise genau N_B, also die Anzahl der Fälle in welchen B eingetreten ist. Die günstigen Fälle davon sind die Würfelergebnisse vier und sechs. Dies sind genau die Ergebnisse, bei welchen A und B eingetreten sind. Für dieses “und” gibt es ein mathematisches Zeichen, nämlich $\cap$. Somit gilt:

$$P(A|B)=\frac{N_{A\cap B}}{N_B}=\frac{2}{3}.$$

Diese Formel gilt nicht nur in diesem Beispiel. Wir bringen sie noch in eine allgemeinere Form, indem wir mit N kürzen.

Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit.

$$P(A|B)=\frac{N_{A\cap B}}{N_B}=\frac{\frac{N_{A\cap B}}{N}}{\frac{N_B}{N}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Betrachtet man zwei Ereignisse (wir nennen sie wieder A und B), so kann man sich fragen, ob diese Ereignisse einander beeinflussen. Zwei Ereignisse, welche einander nicht beeinflussen, nennt man unabhängig zueinander. In der Praxis nennen wir zwei Ereignisse unabhängig, wenn sie von verschiedenen Mechanismen erzeugt werden. Wie sieht dies in der Mathematik aus? Wir können den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit erfolgreich einsetzen. Falls A und B voneinander unabhähgig sind, sollte Kenntnis darüber, ob B eingetreten ist oder nicht, die Wahrscheinlichkeit, dass A eintrifft, nicht verändern. In Formeln:

$$P(A)=P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Diese Formel ist nicht ganz unproblematisch, denn was ist damit gemeint, falls B ein unmögliches Ereignis ist? Dann gilt ja $P(B) = 0$ und wir müssten durch null dividieren! Wir formen daher diese Formel um, indem wir beide Seiten (formal) mit $P(B)$ multiplizieren. Wir erhalten damit eine Formel, mit welcher wir Unabhängigkeit definieren können.

Definition (Unabhängigkeit von Ereignissen)**.** Zwei Ereignisse A und B sind voneinander unabhängig, falls

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

gilt.

Additionsregel und Satz von Bayes

Beispiel (Kurierdienste)**.** Wir wollen eine wichtige Nachricht verschicken. Es gibt dafür zwei Kurierdienste. Der erste Kurierdienst ist doppelt so zuverlässig wie der zweite Kurierdienst, kostet aber auch doppelt so viel. Was ist nun besser, einen Boten des ersten Dienstes oder zwei (unabhängige) Boten des zweiten Dienstes loszuschicken?

Wir formalisieren das Problem: Mit A bezeichnen wir das Ereignis, dass mit dem zuverlässigeren Kurierdienst die Nachricht ankommt, mit B_1, dass der erste Bote des schlechteren Dienstes die Nachricht überbringt und mit B_2 dasselbe für den zweiten Boten des zweiten Kurierdienstes. Es gilt:

$$P(B_1) = P(B_2) \qquad P(A) = 2 \cdot P(B_1)$$

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens B_1 oder B_2 eintritt. Das mathematische Zeichen für dieses "oder" ist $\cup$. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} P(B_1 \cup B_2) &= 1 - P(\text{“weder } B_1 \text{ noch } B_2\text{”}) \\ &= 1 - P(B_1^C \cap B_2^C) \\ &= 1 - P(B_1^C) \cdot P(B_2^C) \\ &= 1 - (1 - P(B_1)) \cdot (1 - P(B_2)) \\ &= P(B_1) + P(B_2) - P(B_1) \cdot P(B_2) \qquad (*) \\ &= 2 \cdot P(B_1) - P(B_1)^2 \\ &= P(A) - P(B_1)^2 \end{aligned}$$

Beim ersten und vierten Gleichheitszeichen wird das Prinzip der Gegenwahrscheinlichkeit eingesetzt und das dritte Gleichheitszeichen gilt nur, weil B_1 und B_2 unabhängig voneinander sind. Wir können schliessen, dass $P(A) \geq P(B_1 \cup B_2)$ (da $P(B_1)^2 \geq 0$). Es ist also besser, nur einen Boten des besseren Dienstes zu beauftragen. In der Berechnung haben wir zudem folgende Gleichheit entdeckt (siehe (*)):

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1) \cdot P(B_2).$$

Sie gilt jedoch nur für unabhängige Ereignisse B_1 und B_2. Ersetzen wir jedoch $P(B_1) \cdot P(B_2)$ mit $P(B_1 \cap B_2)$, erhalten wir

Satz (Allgemeine Additionsregel)**.** *Für zwei Ereignisse B_1 und B_2 gilt*

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2).$$

Nehmen wir nun an, dass wir $P(B|A)$ kennen. Können wir damit $P(A|B)$ berechnen? Ja! Und der folgende Satz zeigt uns auch wie.

Satz von Bayes. *Seien A, B zwei Ereignisse mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$, dann gilt*

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ \Rightarrow P(A \cap B) &= P(B|A) \cdot P(A). \end{aligned} \tag{2}$$

Damit gilt

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \overset{(2)}{=} \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}.$$

□