Lösung 1

1. $(((\frac{4}{3} + \frac{5}{2}) \cdot \frac{6}{5}) - \frac{2}{5}) \cdot \frac{5}{2} = ((\frac{8+15}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}}{5}) - \frac{2}{5}) \cdot \frac{5}{2} = (\frac{23}{\cancel{5}} - \frac{2}{\cancel{5}}) \cdot \frac{\cancel{5}}{2} = \frac{23}{2} - \frac{2}{2} = \frac{21}{2}$
2. (a) $\frac{1}{(\frac{2}{(\frac{3}{4})})} = \frac{1}{2 : \frac{3}{4}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{1}{\frac{8}{3}} = 1 : \frac{8}{3} = 1 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$, (b) $\frac{1}{(\frac{(\frac{2}{3})}{4})} = \frac{1}{(\frac{2}{3 \cdot 4})} = \frac{1}{(\frac{1}{6})} = 1 : \frac{1}{6} = 1 \cdot 6 = 6$,
   (c) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
3. (a) $(\frac{4}{xy} + \frac{3}{yz})(\frac{4z}{xy} - \frac{2}{y}) = (\frac{4}{xy} \cdot \frac{z}{z} + \frac{3}{yz} \cdot \frac{x}{x})(\frac{4z}{xy} - \frac{2}{y} \cdot \frac{x}{x}) = \frac{4z+3x}{xyz} \cdot \frac{4z-2x}{xy} = \frac{(4z+3x)(4z-2x)}{x^2y^2z}$,

   (b) $\frac{\frac{x}{y} - \frac{z}{x}}{\frac{2}{x} + \frac{z}{y}} = \frac{\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{x} - \frac{z}{x} \cdot \frac{y}{y}}{\frac{2}{x} \cdot \frac{y}{y} + \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{x}} = \frac{\frac{x^2 - zy}{xy}}{\frac{2y+zx}{xy}} = \frac{x^2 - zy}{2y+xz}$,

   (c) $\frac{x}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{x}{\frac{1-x}{1-x} - \frac{1}{1-x}} = \frac{x}{\frac{1-x-1}{1-x}} = x \cdot \frac{1-x}{1-x-1} = x - 1$
4. **Behauptung:** $\sqrt{2}$ ist keine rational Zahl. (D.h. es gibt keine ganzen Zahlen a und b, sodass $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.)

   Beweis: Wir nehmen an, es gäbe ganze Zahlen a und b, sodass $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Wir können zusätzlich annehmen, dass $\frac{a}{b}$ ein vollständig gekürzter Bruch ist. Insbesondere können daher nicht sowohl a als auch b gerade sein. (Sonst könnte man den Bruch mit 2 kürzen.) Aus $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ folgt $\frac{a^2}{b^2} = 2$ und somit $a^2 = 2b^2$. Daher ist a^2 und somit auch a gerade (bitte selber nachprüfen). Es gibt also eine ganze Zahl n, sodass $a = 2n$. Damit gilt $2b^2 = a^2 = 4n^2$, woraus $b^2 = 2n^2$ folgt. Daher ist auch b^2 und somit b gerade. Dies widerspricht unserer Annahme, welche somit falsch ist und daher ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl.

   $\square$
5. (a) $\frac{6}{21} = \frac{2}{7} < \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ und $\frac{5}{14} > \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{5}{14} > \frac{6}{21}$, (b) $\frac{27}{5} > \frac{16}{3}$, (c) $\frac{3}{13} = \frac{21}{91}$
6. (a) $(a^{\frac{1}{m}})^m = a^{\frac{m}{m}} = a$

   (b) $a^{-1} \cdot a^1 = a^{-1+1} = a^0 = 1$

   (c) $ab^{-1} + cd^{-1} = ab^{-1}dd^{-1} + cd^{-1}bb^{-1} = (ad + bc)b^{-1}d^{-1} = \frac{ad+bc}{bd}$
7. Lösungen der Gleichung $2x^2 - (2\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0$:

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{2\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2(2 \cdot \sqrt{2}) + 1 + 4(2 \cdot \sqrt{2})}}{4} \\
&= \frac{2\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2(2 \cdot \sqrt{2}) + 1}}{4} \\
&= \frac{2\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{((2\sqrt{2}) + 1)^2}}{4} \\
&= \frac{2\sqrt{2} - 1 \pm (2\sqrt{2}) + 1)}{4},
\end{aligned}
$$

   d.h. $x_1 = -\frac{1}{2}$ und $x_2 = \sqrt{2}$. Daher lauten die Lösungen der Aufgabe: (a) 0, (b) 1, (c) 2.
8. (a) $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1+4 \cdot 6}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = 3$ oder $-2 \Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = -3$,
   (b) $-2x^2 - 4x - 2 = -2 \cdot (x^2 + 2x + 1) = -2 \cdot (x + 1)^2 \Rightarrow x_{1,2} = -1$ (doppelte Nullstelle),
   (c) $x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 - 34} = -5 \pm 3\sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \Rightarrow$ keine reellen Lösungen,
   (d) $y := x^2 \Rightarrow x^4 - 13x^2 + 36 = y^2 - 13y + 36 = 0$
   $\Rightarrow y_{1,2} = \frac{13}{2} \pm \frac{\sqrt{13^2 - 4 \cdot 36}}{2} = 9$ oder $4 \Rightarrow x \in \{\pm\sqrt{y_1}, \pm\sqrt{y_2}\} = \{-2, 2, -3, 3\}$, (e) $2 \pm \sqrt{7}$
9. Diskriminante der Gleichung ist: $(2 + a)^2 - 8$. Diese ist Null, sobald $a = \pm 2\sqrt{2} - 2$. Die Lösung der Gleichung ist dann $x = \sqrt{2}$, falls $a = 2\sqrt{2} - 2$ und $x = -\sqrt{2}$, falls $a = -2\sqrt{2} - 2$

10. Diskriminante $D = (|a|-3)^2 - 4 = (|a|-5)(|a|-1)$. Solange $a < -5$, $-1 < a < 1$ oder $a > 5$, gibt es 2 Lösungen.

11. (a) $x = \frac{5}{2}$, $y = -4$, (b) $x = 1$, $y = 2$, (c) $x = \frac{3}{8}$, $y = \frac{17}{8}$

12. $\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \sqrt{6-2} = \sqrt{4} = 2$

13. (a) $(-1+a)^2 - (1-a)^2 = (-(1-a))^2 - (1-a)^2 = (1-a)^2 - (1-a)^2 = 0$,
(b) $(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2 = ((a^2+b^2)-(a^2-b^2))((a^2+b^2)+(a^2-b^2)) = 4a^2b^2$

14. (a) $9a^n x^7$, (b) $a^{\frac{7}{3}}$

15. **Bemerkung:** Der Beweis wird analog zum Beweis der Aufgabe 4 geführt und wird deshalb nicht gross kommentiert.

    Behauptung: Sei p prim, so ist $\sqrt{p}$ keine rationale Zahl.

    Beweis: Annahme: $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$ ist gekürzter Bruch. Es folgt $p = \frac{a^2}{b^2}$ und daher teilt p a^2 und daher teilt p a. (Bitte selber überprüfen). Es gibt nun ein n, sodass $a = np$ und daraus folgt $b^2 = n^2 p$. Somit teilt p b^2 und daher auch b. Dies widerspricht der Annahme, dass $\frac{a}{b}$ gekürzt ist.

    $\square$