Lösung 10

1. (a) $F(x) = \int x^3 - 5x^2 + 7x - 2\ dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x + c$,

   (b) $F(x) = \int \frac{2}{x^3}\ dx = -x^{-2} + c$,

   (c) $F(x) = \int \sqrt{x}\ dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + c$.

2. $A = \int_0^1 x^2 - x^3 dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

3. 1

4. Nullstellen von p sind $x_1 = 0$ und $x_{2,3} = \pm\sqrt{a}$. Damit können wir folgende Gleichung (für a) aufstellen:

$$\text{Flächenstück} = \int_0^{\sqrt{a}} ax - x^3\, dx = 9$$

   Die Lösung davon ist $a = 6$.

5. Die Nullstellen von p sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$.
   Die Steigung der Tangenten: $f'(x_1) = f'(0) = 3$ und $f'(x_2) = f'(3) = -3$.
   Gleichungen der Tangenten sind gegeben durch $t_1 : x \mapsto 3x$ und $t_2 : x \mapsto -3x + 9$.
   Die Tangenten schneiden sich bei (1.5, 4.5). Da die Figur achsensymmetrisch ist, reicht es aus die eine Hälfte zu berechnen und schlussendlich das Ergebnis zu verdoppeln.

$$\int_0^{1.5} 3x - (3x - x^2)\, dx = \int_0^{1.5} x^2\, dx = 1.125$$

   Also misst die Fläche $A = 2 \cdot 1.125 = 2.25$

6. (a) $\sin x = \cos x$ für $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, wobei $k \in \mathbb{Z}$. Zwei aufeinanderfolgende Schnittpunkte sind also $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{5\pi}{4}$.

   (b)

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin x - \cos x\, dx = [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$$

7. $f(x) = \frac{2}{t^2}x - \frac{1}{t^3}x^2 = x(\frac{2}{t^2} - \frac{1}{t^3}x)$ hat die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2t$. Die Fläche ist gegebene durch

$$\int_0^{2t} \frac{2}{t^2}x - \frac{1}{t^3}x^2\, dx = \frac{4}{3}$$

   und somit unabhängig von t.