Lösung 11

1.

$$\int_0^{\mathrm{e}} \log x\,dx \;=\; \int_0^{\mathrm{e}} 1\cdot\log x \;=\; [x\log x]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x\cdot\frac{1}{x}\,dx \;=\; \underbrace{(\mathrm{e}\log\mathrm{e})}_{=\mathrm{e}} - \underbrace{(1\log 1)}_{=0} - (\mathrm{e}-1) \;=\; 1$$

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx = [\sin x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sin x\,dx$$

Daraus folgt

$$2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx = 1 \Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}$$

3. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos x\,dx = 0$. Man kann entweder dreimal partielle Integration anwenden oder feststellen, dass der Graph von $x^3\cos x$ punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs ist, woraus direkt folgt, dass das Integral verschwindet.

4.

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^2}dx \;=\; \lim_{n\to\infty}\left[\frac{-1}{x}\right]_1^n \;=\; \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}+1 = 1$$

5. Zwei Mal partielle Integration (x^2 ableiten und e^{2x} integrieren) führt zu

$$\int x^2 e^{2x}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{4}(2x^2-2x+1)e^{2x}+c$$

Also ist gesucht $F(x) = \frac{1}{4}(2x^2-2x+1)e^{2x} - \frac{e^2}{4}$

6.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{kx+k}{x^3}\,\mathrm{dx} &= \lim_{n\to\infty}\left(\left[-\frac{kx+k}{2x^2}\right]_1^n - \int_1^n -\frac{k}{2x^2}\,\mathrm{dx}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{kx+k}{2x^2}-\frac{k}{2x}\right]_1^n = \frac{3k}{2}\end{aligned}$$

7. Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} x\log x\,\mathrm{dx} &= \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} x^2\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} x\,\mathrm{dx}\\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{4}\left[x^2\right]_1^{e} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2-0\right) - \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^2-1\right) = \frac{e^2+1}{4}\end{aligned}$$