Lösung 12

1. (a) Seien $y = g(x) = x^2 + 1$ und $f(y) = \frac{1}{y^2}$. Dann gelten $g'(x) = 2x$ und

$$\begin{aligned} F(x) = \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{dx} = \int \frac{g'(x)}{g^2(x)}\,\mathrm{dx} = \int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{dx} \\ = \int f(y)\ dy = -\frac{1}{y} + c = -\frac{1}{x^2+1} + C. \end{aligned}$$

(b) Substitution $u := x + 7$:

$$\int (x+7)^5\,\mathrm{dx} = \int u^5\,\mathrm{du} = \frac{1}{6}u^6 + c = \frac{1}{6}(x+7)^6 + c.$$

(c) $F(x) = \int \frac{x+5}{1-x^2}\ dx = 2\log(|x+1|) - 3\log(|1-x|) + c.$

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\,\mathrm{dx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 (\sin x)'\,\mathrm{dx}$$

Nun können wir die Substitutionsregel anwenden. Mit $t = \sin x$ führt dies auf

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\,\mathrm{dx} = \int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

3. $\int_{-1}^{1} \frac{3x}{x^2+1}\,\mathrm{dx} = \frac{3}{2}(\log(2) - \log(2)) = 0$

4. (a) $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

(b) Nullstelle ist a und somit ist die Fläche gegeben durch

$$\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{dx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\cos^2 t\,dt = ab\frac{\pi}{4}$$

Dabei haben wir die Substitution $x = a\sin t$ verwendet.

(c) Für den Flächeninhalt der Ellipse gilt $A = \pi ab$.

5. (a) Wir erweitern mit $\frac{5}{5}$

$$\int_{\frac{3}{5}}^a \mathrm{e}^{5x-3}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{5}\int_{\frac{3}{5}}^a \mathrm{e}^{5x-3}\,5\,\mathrm{dx}$$

und können Substitution mit $g(x) = 5x - 3$ nutzen

$$\int_{\frac{3}{5}}^a \mathrm{e}^{5x-3}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{5}\int_0^{5a-3} \mathrm{e}^u\,\mathrm{du} = \frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{5a-3} - 1\right).$$

(b) Ähnlich zu der Aufgabe 7, Blatt 11, nutzen wir partielle Integration

$$\int x^2 \log x\,\mathrm{dx} = \frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{dx} + C = \frac{1}{9}x^3\left(3\log x - 1\right) + C$$

.

(c)

$$\begin{aligned}\int x^2(1-\log x)\,\mathrm{dx} &= \int x^2\,\mathrm{dx} - \int x^2 \log x\,\mathrm{dx})\,\mathrm{dx}\\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^3\,(3\log x - 1) + C\\ &= \frac{1}{9}x^3\,(4 - 3\log x) + C\end{aligned}$$

Auswertung bei 1 und 2 ergibt

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2(1-\log x)\,\mathrm{dx} &= \frac{1}{9}2^3\,(4-3\log 2) - \frac{1}{9}1^3\,(4-3\log 1)\\ &= \frac{1}{9}\left(7\cdot 4 - 3\cdot 2^3\log 2\right) = \frac{4}{9}\,(7-6\log 2)\end{aligned}$$

(d) Substitution mit $g(x) = x^2$

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,\mathrm{dx} &= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\sin(x^2)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(u)\,\mathrm{du}\\ &= -\left[\frac{1}{2}\cos(u)\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2}\,(-1-1) = 1\end{aligned}$$

(e) Substitution mit $g(x) = 1 - \mathrm{e}^x$

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x} = -1\int \frac{1}{1-\mathrm{e}^x}(-\,\mathrm{e}^x)\,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{du} = \log u + C = \log(1-\mathrm{e}^x) + C$$

(f) Wir nutzen Teil (d) und erhalten zunächst mit der partiellen Integration

$$\int 2x^3\sin(x^2)\,\mathrm{dx} = \int x^2 2x\sin(x^2)\,\mathrm{dx} = x^2\cdot\underbrace{(-\cos(x^2))}_{=\int 2x\sin(x^2)} - \int 2x\cos(x^2)\,\mathrm{dx} + C.$$

Für $\int 2x\cos(x^2)\,\mathrm{dx}$ ergibt sich wiederum analog zum Teil (d)

$$\int 2x\cos(x^2)\,\mathrm{dx} = -\sin(x^2) + C.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\int 2x^3\sin(x^2)\,\mathrm{dx} = \sin(x^2) - x^2\cos(x^2) + C.$$