Lösung 13

1. Eine Gerade ist gegeben durch $y = mx + b$ für $m, b \in \mathbb{R}$. Für $-12x + 4y = 8$ erhalten wir die Gerade
$$-3x + y = 2 \qquad \text{bzw.} \qquad y = 3x + 2.$$

2. **Fall 1** $a \neq c$**:** Die Geraden schneiden sich im Punkt $\left(\frac{d-b}{a-c}, \frac{ad-bc}{a-c}\right)$.

   Fall 2 $a = c$ **und** $b = d$**:** Die Geraden schneiden sich nicht, sondern fallen aufeinander.

   Fall 3 $a = c$ **und** $b \neq d$**:** Die Geraden schneiden sich nicht, sondern sie sind parallel.

3. (a) Es gibt nur die eine Lösung $(x, y) = (2, 1)$:
$$\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 5 \\ 3x + 7y & = & 13 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 6x + 3y & = & 15 \\ 6x + 14y & = & 26 \end{array} \Rightarrow \quad 11y \ = \ 11 \quad \Rightarrow \begin{array}{rcl} y & = & 1 \\ x & = & 2 \end{array}$$

   (b) Es gibt keine Lösung:
$$\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 5 \\ 10x + 5y & = & 11 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 10x + 5y & = & 25 \\ 10x + 5y & = & 11 \end{array}$$

   (c) es gibt unendlich viele Lösungen, sie haben die Form $(x, y) = (x, -3x + 6)$:
$$\begin{array}{rcl} 3x + y & = & 6 \\ 9x + 3y & = & 18 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 3x + y & = & 6 \\ 3x + y & = & 6 \end{array} \Rightarrow \quad y \ = \ -3x + 6, \qquad x \in \mathbb{R}$$

4. (a) Die Lösungsmenge ist eine Gerade, gegeben durch die Gleichung $x + z = 1$ wobei $y = 0$:
$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ x + 2y + z & = & 1 \end{array} \Rightarrow \quad y \ = \ 0 \quad \Rightarrow \begin{array}{rcl} x + y + z & = & x + z \ = \ 1 \\ & & \text{Gerade} \end{array}$$

   (b) Es gibt keine Lösung:
$$\begin{array}{rcl} 2x + y + z & = & 1 \\ -4x - 2y - 2z & = & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} -4x - 2y - 2z & = & -2 \\ -4x - 2y - 2z & = & 1 \end{array}$$

   (c) Die Lösungsmenge ist eine Ebene, gegeben durch $2x + y + z = 1$:
$$\begin{array}{rcl} 2x + y + z & = & 1 \\ -4x - 2y - 2z & = & -2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} -4x - 2y - 2z & = & -2 \\ -4x - 2y - 2z & = & -2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 2x + y + z \ = \ 1 \\ \text{Ebene} \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{rcl} 3x + 6y - 2z & = & 0 \\ 4x + 2y + 3z & = & 5 \\ 5x - 3y + 4z & = & -4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 3x + 6y - 2z & = & 0 \\ 12x + 6y + 9z & = & 15 \\ 10x - 6y + 8z & = & -8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 13x + 6z & = & -8 \\ 22x + 17z & = & 7 \end{array}$$
$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} 286x + 132z & = & -176 \\ 286x + 221z & = & 91 \end{array} \Rightarrow \quad 89z \ = \ 267 \quad \Rightarrow \begin{array}{c} z = 3 \quad \text{und} \\ x = -2, \quad y \ = \ 2 \end{array}$$

   Die Lösung lautet $(x, y, z) = (-2, 2, 3)$.