Lösung 14

1. (a) $(3,3,3)$, (b) $(-1,1,5)$, (c) 0, (d) $(3,6,12)$, (e) $\sqrt{21}$ (f) $3\sqrt{21}$ und

$$\text{(g)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{2}{\sqrt{21}} \\ \frac{4}{\sqrt{21}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

2.

$$\left| \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right| = \left| \frac{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \right| = \left| \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \\ \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \\ \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \end{pmatrix} \right|$$

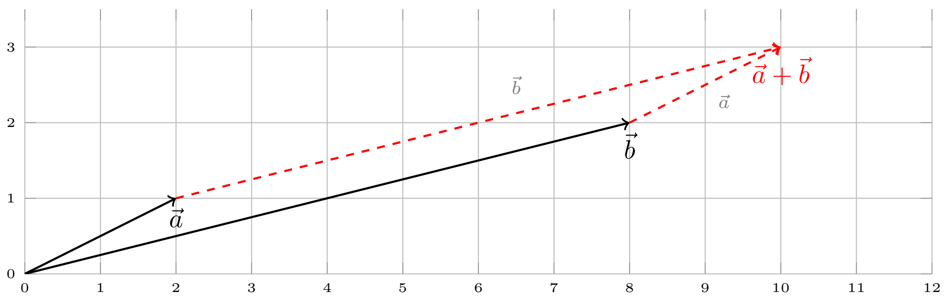
$$= \sqrt{\frac{a_1^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2} + \frac{a_2^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2} + \frac{a_3^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} = 1$$

3. Gesucht seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit

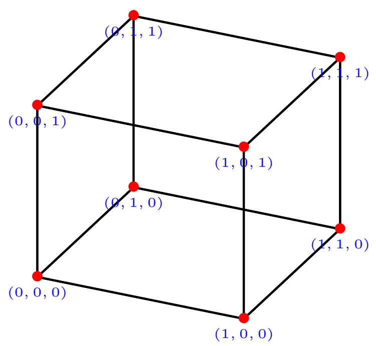
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2x - 3y + 4z = 0.$$

Es gibt unendlich viele solche Vektoren P, z.B. für $x = 3$ und $y = 2$ bekommen wir $4z = -2x + 3y = -6 + 6 = 0$ und $P = (3, 2, 0)$.

4. $\vec{a} + \vec{b} = (2,1) + (8,2) = (10,3)$



5. Die Koordinaten der 8 Ecken sind: $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ und $(1,1,1)$.



6. $A = (3,4,0)$ und $B = (2,1,5) \Rightarrow |A - B| = |(-1,-3,5)| = \sqrt{1+3^2+25^2} = \sqrt{35}$

7. (a) Setzen wir $x = 0$ und $x = 1$ in $y = 2x + 3$ ein und wir erhalten $p_0 = (x = 0, y = 3)$ und $p_1 = (x = 1, y = 5)$. Mit $v = p_1 - p_0 = (1, 5) - (0, 3) = (1, 2)$ bekommen wir somit die Gerade in Parameterform:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Gerade g geht durch die Punkte $(2, 1)$ (für $t = 0$) und $(7, 9)$ (für $t = 1$). Somit lautet die Steigung m der Gerade $m = \frac{9-1}{7-2} = \frac{8}{5}$. Setzen wir $(x = 2, y = 1)$ in die Geradengleichung $y = mx + b$ ein, erhalten wir

$$1 = \frac{16}{5} + b, \qquad b = -\frac{11}{5}.$$

Die Geradengleichung lautet somit

$$y = \frac{8}{5}x - \frac{11}{5} \quad \text{(oder auch} \quad 5y = 8x - 11 \quad \text{bzw.} \quad 5y - 8x + 11 = 0).$$

8. (a) Gesucht sei t mit

$$(1, 2) + t \cdot (9, 5) = P = (28, 17) \Rightarrow t \cdot (9, 5) = (27, 15) \Rightarrow t \cdot (1, 1) = (3, 3).$$

P liegt auf der Gerade g mit $g(3) = P$ (also $t = 3$).

(b) Gesucht sei t mit

$$(5, 8) + t \cdot (7, 2) = P = (19, 14) \Rightarrow t \cdot (7, 2) = (14, 6) \Rightarrow t \cdot (1, 1) = (2, 3).$$

Solches t existiert nicht und daher liegt P nicht auf der Gerade g.