Lösung 17

1. (a) $3! = 6$ und $5! = 3! \cdot 4 \cdot 5 = 120 \Rightarrow 3! \cdot 5! = 720$

   (b) $\frac{7!}{5!} = 6 \cdot 7 = 42$ und $\frac{11!}{8!} = 9 \cdot 10 \cdot 11 = 990$

2. 21 Filme und 3 Filme pro Session, d.h. es gibt 7 Sessions.

   $3^7 = 2187$ (Bonus: $\frac{21!}{(3!)^7} = 182'509'367'040'000$)

3. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 360$

4. $39 \cdot 37 = 1443$

5. (a) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^4 = 6561$

   (b) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ verschiedene solche Zahlen.

6. $15! = 1'307'674'368'000$

7. $\underbrace{2^1}_{\text{einstellige}} + \underbrace{2^2}_{\text{zweistellige}} + \underbrace{2^3}_{\text{dreistellige}} + \underbrace{2^4}_{\text{vierstellige}} = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$

8. $2^{10} = 1024$

9. $(24 + 1) \cdot (27 + 1) = 25 \cdot 28 = 700$

10. $\frac{10!}{10} = 9! = 362880$

11. **Behauptung:** $(2n)! > (n!)^2$.

    Beweis: Sind a und b zwei positive Zahlen, so ist a genau dann grösser als b, wenn $\frac{a}{b}$ grösser als 1 ist. Wir setzen $a = (2n)!$ und $b = (n!)^2$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} &= \frac{(2n) \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1}{\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1}_{n!} \cdot \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1}_{n!}} \\ &= \underbrace{\frac{2n}{n}}_{>1} \cdot \underbrace{\frac{2n-1}{n-1}}_{>1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{n+1}{1}}_{>1} \cdot \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n-1}}_{=1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{1}{1}}_{=1} > 1 \end{aligned}$$

    □

12. **Beweis:**

$$\begin{aligned} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} &= \frac{n! \cdot (k+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n! \cdot (k+1) + n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n! \cdot (\cancel{k} + 1 + n - \cancel{k})}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} \end{aligned}$$

    □