Lösung 18

1. a) 1, 5, 10, 10, 5, 1 und es gilt
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
b) $\binom{100}{99} = \frac{100!}{99!\cdot 1!} = 100$, $\binom{2000}{2} = \frac{1999\cdot 2000}{2} = 1999000$, $\binom{10^6}{10^6} = \frac{10^6!}{0!10^6!} = 1$
2. $\binom{100}{3} = 161700$
3. $\binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$
4. $\binom{22}{11} \cdot \binom{22}{11} = 497'634'306'624$
5. $11 \cdot 11 = 11^2 = 121$
6. (höchstens) $\binom{12}{2} = \frac{12\cdot 11}{2} = 66$
7. $\binom{6}{3} + 6 \cdot 5 + 6 = 56$
8. $\binom{18}{3} = \frac{16\cdot 17\cdot 18}{3!} = 816$
9. $\binom{36}{9} = 94'143'280$
10. (a) $\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = 45$; (b) $\binom{8+10-1}{8} = \binom{17}{8} = 24310$
11. $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\dots\cdot(a+b)}_{n\text{-Faktoren}}$

   Wie bekommt man $a^{n-k}b^k$? Indem man aus k Klammern b und aus $n-k$ Klammern a auswählt. Dies ist auf $\binom{n}{k}$ Arten möglich und deshalb ist der Koeffizient von $a^{n-k}b^k$ $\binom{n}{k}$.
12. **Beweis (mittels Formel):**
$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} 1^{n-k}1^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$
   Beweis (mit vollständiger Induktion): Induktionsverankerung ($n=0$):
$$1 = 2^0 = \binom{0}{0} = 1 \qquad \checkmark$$
   Induktionsschritt ($n \to n+1$):
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} &= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) + 1 \\ &= \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \stackrel{\text{I.V.}}{=} 2\cdot 2^n = 2^{n+1}\end{aligned}$$
   Im zweiten Gleichheitszeichen haben wir die Aufgabe 12 von Blatt 17 verwendet. □