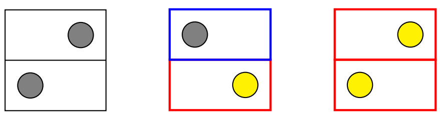
Lösung 20

1. Unabhängigkeit bedeutet
$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B).$$
Die folgenden Wahrscheinlichkeiten können mit Hilfe eines Wahrscheinlichkeitsbaums berechnet werden.
   (a) $P(\text{„1. Kugel weiss“}) = \frac{1}{2}$, $P(\text{„2. Kugel weiss“}) = \frac{1}{2}$ und $P(\text{„1. und 2. Kugel weiss“}) = \frac{1}{4}$. Und es gilt
   $$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$
   Also sind die Ereignisse unabhängig voneinander.
   (b) $P(\text{„1. Kugel weiss“}) = \frac{1}{2}$, $P(\text{„2. Kugel weiss“}) = \frac{1}{2}$ und $P(\text{„1. und 2. Kugel weiss“}) = \frac{1}{6}$. Und es gilt
   $$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \neq \frac{1}{6}$$
   Also sind die Ereignisse nicht unabhängig voneinander.
2. Gegeben seien die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
   - T = Test positiv und T^c = Test negativ
   - K = hat Krebs und K^c = hat keinen Krebs
   - $P[T|K] = 0.96$ und $P[T^c|K^c] = 0.94$
   - $P[K] = 0.007$

   Es gilt
   - $1 - P[K] = P[K^c] = 0.993$
   - $P[T] = P[T \cap K] + P[T \cap K^c] = P[T|K]P[K] + P[T|K^c]P[K^c]$
     $= 0.96 \cdot 0.007 + 0.06 \cdot 0.993 = 0.0663$

   (a) $P[K|T] = \frac{P[K \cap T]}{P[T]} = \frac{P[T|K]P[K]}{P[T]} = \frac{0.96 \cdot 0.007}{0.0663} \approx 10.1357466063348\%$
   (b) $P[K|T^c] = \frac{P[T^c|K]P[K]}{P[T^c]} = \frac{(1-P[T|K])P[K]}{1-P[T]} = \frac{(1-0.96)\cdot 0.007}{1-0.0663} = 0.0299882189139981\%$
3. Gegeben seien die folgenden Daten:
   - A = Amerikaner
   - T = Tomatensaft
   - $P[A] = P[A^c] = \frac{1}{2}$
   - $P[T|A] = \frac{1}{8}$ und $P[T|A^c] = \frac{1}{80}$
   - $P[T] = P[T|A]P[A] + P[T|A^c]P[A^c] = \frac{1}{16} + \frac{1}{160} = \frac{11}{160}$

   Dann gilt $P[A|T] = \frac{P[T|A]P[A]}{P[T]} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{160}{11} = \frac{10}{11} \approx 90.9\%$.
4. M_1, M_2 = Münzen, S=Silbermünze, G=Goldmünze
   $P[M_2 = S|M_1 = G] = \frac{1}{3}$



5. K=Kind, T=Tochter, $P[K = T] = \frac{1}{2}$

   (a) $P[K_1 = K_2 = T] = P[K_1 = T]P[K_2 = T] = \frac{1}{4}$

   (b) $P[K_2 = T|K_1 = T] = P[K_2 = T] = \frac{1}{2}$ (stochastisch unabhängig)

   (c) $P[K_1 = K_2 = T|\text{hat mind. eine Tochter}]$

$$= \frac{|\{(K_1 = T, K_2 = T)\}|}{|\{(K_1 = T^c, K_2 = T), (K_1 = T, K_2 = T^c), (K_1 = T, K_2 = T^c)\}|} = \frac{1}{3}$$