Lösung 3

1. **Behauptung:** $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

   Beweis:

   Induktionsverankerung ($n = 1$): $a_1 = a_1 + (1-1)\cdot d = a_1$ ✓

   Induktionsschritt ($n \to n+1$): $a_{n+1} = a_n + d \overset{\text{I.A.}}{=} a_1 + (n-1)d + d = a_1 + ((n+1)-1)\cdot d$ ✓

   □

2. **Behauptung:** $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

   Beweis:

   Induktionsverankerung ($n = 1$): $a_1 = a_1 q^{1-1} = a_1$ ✓

   Induktionsschritt ($n \to n+1$): $a_{n+1} = a_n q \overset{\text{I.A.}}{=} a_1 q^{n-1}\cdot q = a_1 q^{(n+1)-1}$ ✓

   □

3. **Induktionsverankerung ($n = 1$):** $a_1 = 0.5 - 0.5 + 1 = 1$ ✓

   Induktionsschritt ($n \to n+1$): Es gilt $a_{n+1} = a_n + n$. Da wir annehmen, dass $a_n = 0.5n^2 - 0.5n + 1$, gilt $a_{n+1} = 0.5n^2 - 0.5n + 1 + n = 0.5(n+1)^2 - 0.5(n+1) + 1$ und die Formel ist bewiesen.

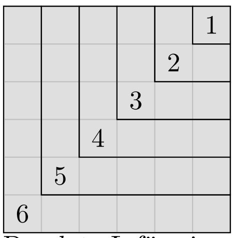
4. (a) **Induktionsverankerung ($n = 1$):** $a_1 = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$ ✓

   Induktionsschritt ($n \to n+1$): Es gilt $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{I.A.}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$. Weiterhin gilt $\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ und die Behauptung ist bewiesen.

   (b) **Induktionsverankerung ($n = 1$):** $a_1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1$ ✓

   Induktionsschritt ($n \to n+1$): Es gilt $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{I.A.}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$. Weiterhin gilt $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$ und die Behauptung ist bewiesen.

5. Es gilt $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k) - \sum_{k=1}^{n}(1) = 2\sum_{k=1}^{n}(k) - \sum_{k=1}^{n}(1) = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n = n^2$.

6. 

   Das k-te L-förmige Gebiet besteht aus $2k-1$ Einheitsquadraten. Die ersten n L-förmigen Gebiete kann man zu einem Quadrat mit der Seitenlänge n zusammenlegen. Dieses grosse Quadrat besteht somit aus n^2 Einheitsquadraten, womit die Formel gezeigt ist.

7. **Induktionsverankerung ($n = 1$):** $S_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_1) = a_1$ ✓

   Induktionsschritt ($n \to n+1$): $S_{n+1} = S_n + a_1 + n\cdot d \overset{I.A.}{=} \frac{n}{2}(a_1 + a_n) + a_1 + n\cdot d = \frac{n}{2}a_1 + \frac{n}{2}a_n + a_1 + d\cdot n = \frac{n}{2}a_1 + \frac{n}{2}a_n + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{2} + \frac{d\cdot n}{2} + \frac{d\cdot n}{2} = \underbrace{\frac{n}{2}a_1 + \frac{a_1}{2}}_{=\frac{n+1}{2}a_1} + \underbrace{\frac{n}{2}a_n + \frac{d\cdot n}{2}}_{=\frac{n}{2}a_{n+1}} + \underbrace{\frac{a_1}{2} + \frac{d\cdot n}{2}}_{=\frac{1}{2}a_{n+1}} = \frac{n+1}{2}(a_1 + a_{n+1})$, womit der Beweis endet.

8. **Induktionsverankerung ($n=1$):** $S_1 = a_1 \frac{1-q}{1-q} = a_1$ ✓

   Induktionsschritt ($n \to n+1$): $S_{n+1} = S_n + a_1 \cdot q^n \overset{I.A.}{=} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} + a_1 \cdot q^n = a_1(\frac{1-q^n}{1-q} + \frac{(1-q)q^n}{1-q}) = a_1 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, womit der Beweis endet.

9. Falls $|q| < 1$ konvergiert obiger Ausdruck, d.h. $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 \frac{1-q^n}{1-q}) = \frac{a_1}{1-q}$, da q^n immer kleiner wird, sobald $|q| < 1$.
   Falls $q = 1$, so gilt $a_n = a_1$ für alle n und somit $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ (abhängig davon ob a_1 positiv oder negativ).
   Falls $q = -1$, so gilt $a_n = a_1 \cdot (-1)^{n-1}$ für alle n und somit konvergiert $\lim_{n\to\infty} S_n$ nicht (auch nicht gegen ∞!)
   Falls $q > 1$, so gilt $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ (abhängig davon ob $a_n > 0$ oder $a_n < 0$) und falls $q < -1$ konvergiert $\lim_{n\to\infty} S_n$ wiederum nicht (auch nicht gegen ∞).

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, wie man folgendermassen einsieht:
    $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{(\frac{1}{3} + \frac{1}{4})}_{>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8})}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \ldots$, und somit addiert man immer wieder nach endlicher Zeit mindestens $\frac{1}{2}$ zu unserer Summe dazu, womit der Ausdruck gegen unendlich konvergiert.