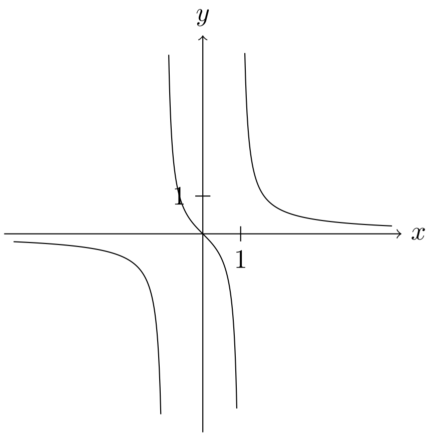
Lösung 5

1. (a) $f(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(1-\frac{1}{x})(x+1)}$:
   Nullstelle bei $x = 0$, Polstellen bei $x = \pm 1$, Asymptote ist $y = 0$.

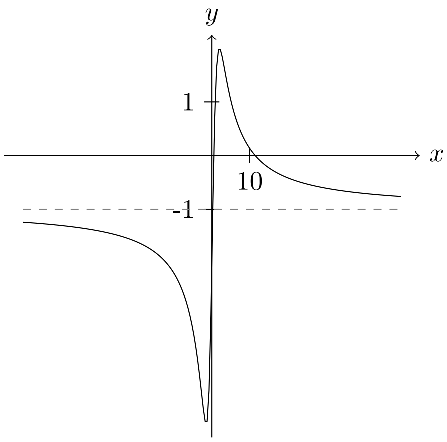
   (b) $f(x) = \frac{12x-x^2-6}{x^2+3} = -\frac{(x-6-\sqrt{30})(x-6+\sqrt{30})}{x^2+3} = \frac{-1+\frac{12}{x}-\frac{6}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}$:
   Nullstellen bei $x = 6 \pm \sqrt{30}$, keine Pole, Asymptote ist $y = -1$.

   (c) $f(x) = \frac{x^3-8}{4x} = \frac{x^3-2^3}{4x} = \frac{x^2}{4} - \frac{2}{x}$:
   Nullstelle bei $x = 2$, Pol bei $x = 0$, Asymptote ist $y = \frac{x^2}{4}$.

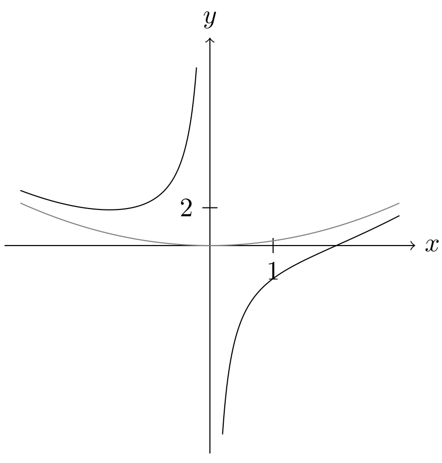
   (d) $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$:
   Nullstelle bei $x = 3$, Pol bei $x = -2$, Unbestimmtheitsstelle bei $x = 1$, Asymptote ist $y = 1$.



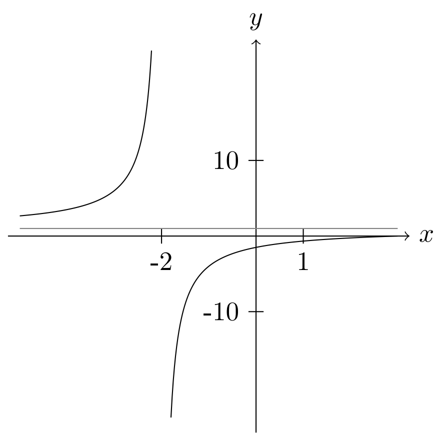
(a) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$



(b) $f(x) = \frac{12x-x^2-6}{x^2+3}$

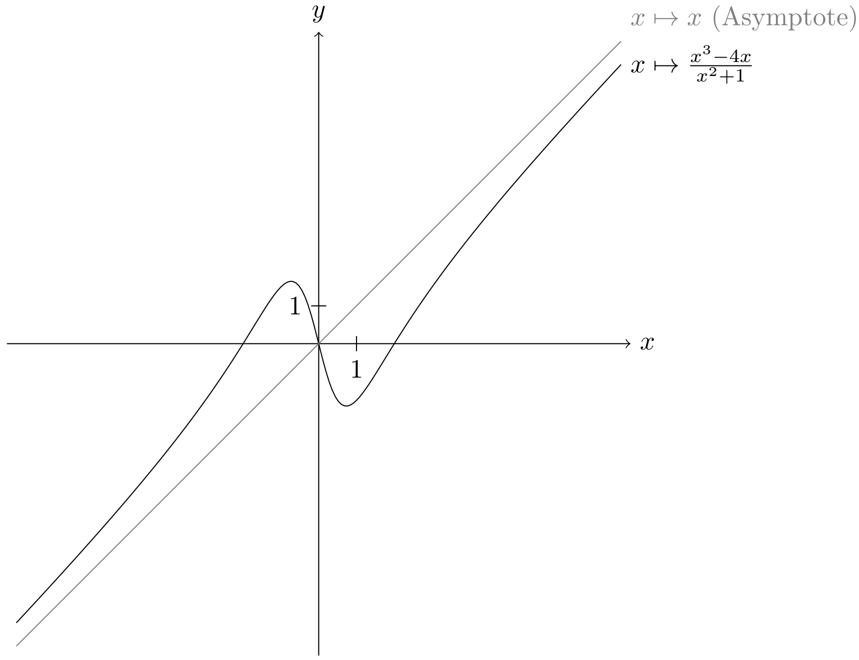


(c) $f(x) = \frac{x^3-8}{4x}$



(d) $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$

2. $x \mapsto \frac{x^3-4x}{x^2+1}$ hat Nullstellen $x = -2, 0, 2$, keine Polstellen und geht nach $\pm\infty$ für $x \to \pm\infty$.



3. (a) Für $x \neq -1$: $\frac{x-2}{2x+2} + \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x-2}{x+1} + \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x-2+2x}{x+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x-2}{x+1}$

   $\Rightarrow \frac{x-2}{2x+2} + \frac{x}{x+1} = \frac{x^2-x-1}{x+1} \iff \frac{3x-2}{2} = x^2 - x - 1 \iff x^2 - \frac{5x}{2} = x(x - \frac{5}{2}) = 0$

   $\Rightarrow$ Lösungsmenge $L = \{0, 5/2\}$

   (b) Für $|x| \neq 1$: $\frac{x-3}{x^2-1} + \frac{x^2}{x+1} = \frac{x-3}{x^2-1} + \frac{x^2(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-3+x^2(x-1)}{x^2-1}$, $\frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2(x+1)}{(x-1)(x+1)}$

   $\frac{x-3}{x^2-1} + \frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2}{x-1} \iff x - 3 + x^2(x-1) = x^2(x+1) \iff 2x^2 - x + 3 = 0$

   Diskriminante $D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -23 < 0 \Rightarrow$ Lösungsmenge $L = \{\}$

   (c) Für $x \neq 2$: $\frac{x^2+x+1}{x-2} + 2 = \frac{x^2+x+1}{x-2} + \frac{2\cdot(x-2)}{x-2} = \frac{x^2+3x-3}{x-2}$

   $\frac{x^2+x+1}{x-2} + 2 = \frac{-5}{x-2} \iff x^2 + 3x - 3 = -5 \iff x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) = 0$

   $\Rightarrow$ Lösungsmenge $L = \{-2, -1\}$

   (d) Für $|x| \neq 4$:

   $x + \frac{4}{x-4} = \frac{x(x-4)+4}{x-4} = \frac{x^2-4x+4}{x-4}$, $\frac{x^2+4x}{x^2-16} = \frac{x(x+4)}{(x+4)(x-4)} = \frac{x}{x-4}$

   $x + \frac{4}{x-4} = \frac{x}{x-4} \iff x^2 - 4x + 4 = x \iff x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) = 0$

   $\overset{x\neq 4}{\Rightarrow}$ Lösungsmenge $L = \{1\}$

   Achtung: ± 4 löst die Gleichung nicht, denn bei beiden ist die rechte Seite der Gleichung nicht definiert!

4. $\frac{3}{x^2+3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+Bx}{x(x+3)} = \frac{x\overbrace{(A+B)}^{=0} + \overbrace{3A}^{=3}}{x^2+3x}$

   $\Rightarrow A + B = 0, A = 1, B = -1$

   $\Rightarrow \frac{3}{x^2+3x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}$

5. Lösung: $a = -12$. Den Zähler kann man mittels Polynomdivision umschreiben. Es gilt: $x^3 - 5x - 12 = (x^2 + 3x + 4)(x - 3)$ und die Diskriminante von $x^2 + 3x + 4$ ist -5. Daher hat der Zähler und somit die ganze Funktion keine weitere Nullstelle.

6. Asymptote $y = 3x^2 + 2x \Rightarrow \frac{6x^n}{ax} = \frac{6}{a}\ x^{n-1} = 3x^2 \Rightarrow n = 3$ und $a = 2$
   Pol bei $x = 4 \Rightarrow 4a - b = 0$ bzw. $b = 4a = 8$
   Betrachte: $6x^3 - px = (2x - 8)(3x^2 + 12x) = 6x^3 - 96x \Rightarrow p = 96$
   $\Rightarrow y = \frac{6x^3 - 96x + 1}{2x - 8}$.

7. $(x^5 + 2x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x - 1) : (x^2 - 1) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$.