Lösung 9

1. Polynome sind überall differenzierbar.

   Der Beweis hier ist optional. Beachte $(a+b)^k = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} a^{k-m} b^m$, wobei $\binom{k}{m} = \frac{k!}{(k-m)!m!}$
   Für $k \geq 0$ gilt

$$\frac{(x+h)^k - x^k}{h} = \frac{\sum\limits_{m=0}^{k} \binom{k}{m} x^{k-m} h^m - x^k}{h} = \frac{\sum\limits_{m=1}^{k} \binom{k}{m} x^{k-m} h^m}{h} = k x^{k-1} + \underbrace{h \sum_{m=2}^{k} \binom{k}{m} x^{k-m} h^{m-2}}_{\to 0 \text{ für } h \to 0}.$$

   $\Rightarrow (x^k)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^k - x^k}{h} = k x^{k-1}$.
   Aus Linearität folgt die Ableitung

$$x \mapsto a_1 + 2a_2 x + \ldots + k a_k x^{k-1} + \ldots + n a_n x^{n-1}.$$

2. (a) direkte Ableitung: $f(x) = (\sqrt{x} - q)(1 + \sqrt{x}) = \sqrt{x}(1-q) - q + x \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1-q}{2\sqrt{x}}$

   Produktregel: $f'(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-q}{2\sqrt{2}} = \frac{1+2\sqrt{x}-q}{2\sqrt{x}} = 1 + \frac{1-q}{2\sqrt{x}}$

   (b) $f(x) = (1 - x^{-4})(x^{-1} + x^2) = x^{-1} + x^2 - x^{-5} - x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} + 2x + 5x^{-6} + 2x^{-3}$

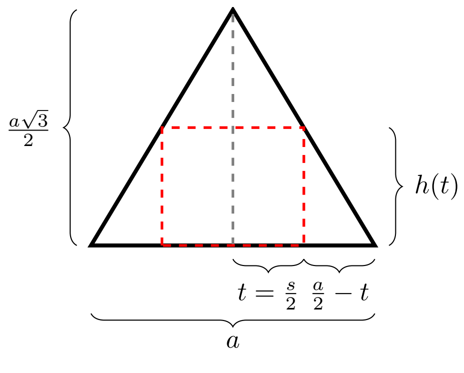
   (c) $f(x) = x^x = \mathrm{e}^{\log(x^x)} = \mathrm{e}^{x\log(x)} \Rightarrow f'(x) = \mathrm{e}^{x\log(x)}(x \cdot \frac{1}{x} + \log(x)) = x^x(\log x + 1)$

   (d) $f(x) = \log(ax+b) \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{ax+b}$

3. Die Ableitung $f'(x_0)$ muss in x_0 gleich ± 1 sein. (a) $\{(1/2, 1/4), (-1/2, 1/4)\}$, (b) $\{\pm(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3^{3/2}})\}$, (c) $\{(1,2),(2,2)\}$ und (d) $\{(0,1)\}$.

4. Maximiere $x(a-x)$. Dies ergibt $x = a/2$. Also: $a_1 = a_2 = a/2$.

5. Sei a die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks und $s = 2t$ die Seitenlänge des Rechtecks.



   Betrachte $A(t) = s(t) \cdot h(t)$ für $t \in [0, a/2]$, wobei $h(t) = (\frac{a}{2} - t)\sqrt{3}$. Nun maximieren wir $A(t)$, d.h. gesucht sei t^* mit $A'(t^*) = 0$.

   $A'(t) = (2\sqrt{3}t(\frac{a}{2} - t))' = 2\sqrt{3}(\frac{a}{2} - 2t) = 0 \Rightarrow t = \frac{a}{4}$. Wegen $A''(t) < 0$ für alle t und $A(0) = A(a/2) = 0$ ist $t^* = \frac{a}{4}$ das eindeutige, globale Maximum von A mit $A_\square = A(t^*) = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

   Die Fläche des Dreiecks sei hier $A_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Daraus folgt

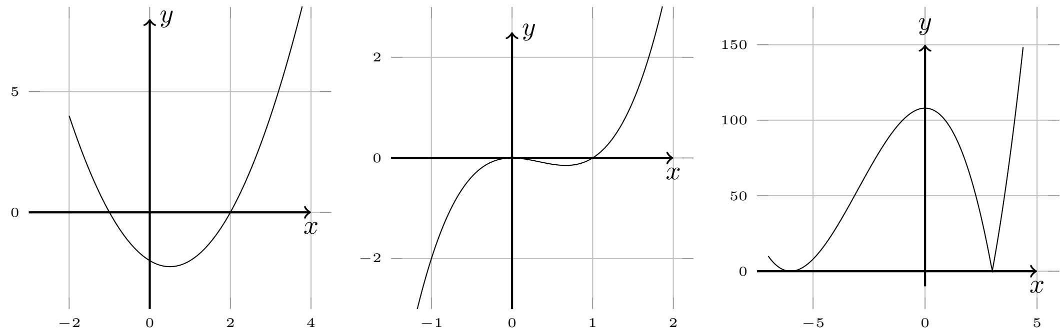
$$\frac{A_\Delta}{A_\square} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{8}} = 2$$

   bzw. Dreiecksfläche : Rechtecksfläche $= 2 : 1$.

6. Sei $g(x) = 50x - K(x)$ der Gewinn. Wir lösen $g'(x^*) = 0$ und bekommen $x^* = 5.708$ und $g''(x^*) \approx -32.5 < 0$, d.h. es sollten 5708 Stück Radiergummi produziert werden.

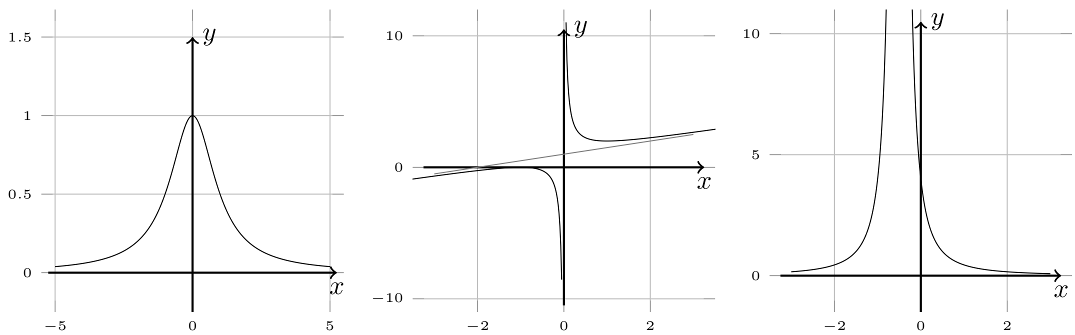
7. (a) Nullstellen bei $x = -1, x = 2$, absolutes Minimum in $(1/2, -9/4)$, (b) Nullstellen bei $x = 0, x = 1$, relatives Maximum in $(0, 0)$, relatives Minimum in $(2/3, -4/27)$ und (c) Nullstellen und absolute Minima in $(-6, 0)$ und $(3, 0)$, relatives Maximum in $(0, 108)$

   Bemerkung: $x^3 + 9x^2 - 108 = (x + 6)^2(x - 3)$



(a) $x \mapsto x^2 - x - 2$ (b) $x \mapsto x^3 - x^2$ (c) $x \mapsto x^3 - x^2$

8. (a) Definitionsbereich: $\mathbb{R}$; keine Polstellen; keine Nullstelle; Asymptote: x-Achse $y = 0$; absolutes Maximum $(0, 1)$. (b) Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; Polstelle in $x = 0$; Nullstelle in $x = -1$; Asymptote: $y = \frac{1}{2}x + 1$, relatives Maximum in $(-1, 0)$, relatives Minimum in $(1, 2)$. (c) Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$; Polstelle in $x = -\frac{1}{2}$; keine Nullstelle; Asymptote: x-Achse $y = 0$; keine Extrema.



(a) $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ (b) $x \mapsto \frac{x^2+2x+1}{2x}$ (c) $x \mapsto \frac{4}{(2x+1)^2}$

9. (a) $f(x) = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$ und $f''(x) = 2 > 0$.
   Das absolute Minimum liegt bei $(1, 2)$.

   (b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ und $f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

   $f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$ und $f''(1) = -1/2 < 0$, $f''(-1) = 1/2 > 0$.

   Das Minimum liegt bei $(-1, -1/2)$, das Maximum liegt bei $(1, 1/2)$ und

   (c) $f(x) = (x - a)^4 \geq 0$ und $f(x) = 0 \iff x = a$, d.h. das Minimum liegt bei $(a, 0)$.

10. Wurfbahn: $f : x \mapsto -2x^2 + 4x$, Ableitung in 0 ist 4, also Schiesswinkel mit der x-Achse ist gleich $\arctan 4 = 1.3258 = 75.964°$.

11. Finde die Extrema von $x + \frac{a}{x}$. Dies ergibt $x = \pm\sqrt{a}$. Da nur positive Lösungen gesucht sind ist die Lösung also $a_1 = a_2 = \sqrt{a}$.

12. Sei $f(x) = \frac{1}{x}$ und $d(x) = x^2 + f(x)^2$, der quadratische Abstand von f zum Nullpunkt. Dann gilt

$$d'(x) = 2x + 2f'(x)f(x) = 2x - 2x^{-3} = 2 \cdot (x - x^{-3}), \qquad d''(x) = 2 \cdot (1 + 3x^{-4})$$

und somit $d'(x) = 0 \iff x = \pm 1$ und $d''(\pm 1) = 8 > 0$, d.h. $x = \pm 1$ minimiert den Abstand von f zum Nullpunkt. Die Punkte seien $(1, 1)$ und $(-1, -1)$.