Vorkurs Mathematik

01. – 05. September 2025

Flavio Dalessi, Florian Lanz, Carina Santos,
Timo Schlüter, Remo von Rickenbach

UNI
BASEL

Skript geschrieben von Sebastian Knüsli und Christian Stohrer,
ergänzt und verbessert von Manuela Utzinger, Dennis Tröndle,
Jet Hoe Tang und Carina Santos.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 1

Skript 2

2 Basics 3

3 Lösen von Gleichungen 4

4 Zahlenfolgen 7

5 Grenzwerte 8

6 Vollständige Induktion 9

7 Reihen 10

8 Funktionen 12

9 Trigonometrische Funktionen 21

10 Exponentialfunktion und Logarithmen 23

11 Differentiation 26

12 Integration 30

13 Lösen von Gleichungssystemen 36

14 Vektoren 39

15 Geraden in Ebene und Raum 42

16 Ebenen im Raum 45

17 Kombinatorik 50

18 Wahrscheinlichkeitslehre 55

1 Einleitung

"In mathematics you don't understand things. You just get used to them."
John von Neumann

Ein schwieriges Fach, diese Mathematik. Selbst anerkannten Grössen solche Zeilen wie oben abringend, erstaunt es kaum, dass sie dem Normalsterblichen Respekt, wenn nicht gar Furcht einflösst. Diese Sachen abzubauen, diese Gewöhnung an die Mathematik zu fördern, sind die Ziele dieses Kurses. Wir haben ihn nicht geschrieben um dem ambitionierten Primus einen Haufen neuer Erkenntnisse zu präsentieren. Die behandelten Gegenstände sind das, was ein/e Maturand/in nach unserem Ermessen in der Schule kennengelernt haben sollte. Wir haben den Kurs geschrieben im Gedanken an Leute, die vielleicht keine guten Erinnerungen an die Schulmathematik haben, die Mühe hatten und sich jetzt trotzdem, vielleicht sogar nach ein, zwei Jahren Mathe-Abstinenz, an ein naturwissenschaftliches Studium wagen, was wir toll finden. Diese Leute auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen, Lücken aufzuzeigen und vielleicht auszufüllen, Furcht zu nehmen, auf dass an der Uni unbeschwerter losgelegt werden kann, ist unser Ziel. Manches wird altbekannt und einfach erscheinen, anderes ist vielleicht ganz neu. Wie das dem Kurs zugrundeliegende Skript. Orientiert haben wir uns an den Unterlagen der bisherigen Vorkurse, die von Jonas Budmiger, Jan Draisma und Johannes Lieberherr verfasst wurden. Wir danken ihnen für das zur Verfügung stellen ihres Materials, welches uns eine grosse Hilfe beim Auf-die-Beine-stellen des Kurses war. Der, wenn er seinen Zweck erfüllt, den ersten Satz des Zitats ein wenig widerlegt.

Basel, 8. September 2008 Sebastian Knüsli und Christian Stohrer

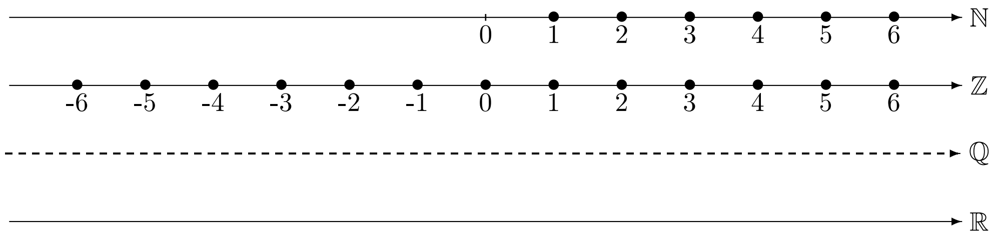
Die Idee und der Aufbau des Kurses sind die gleichen wie im letzten Jahr. Das Skript haben wir jedoch einer Kur unterzogen um es von den Kinderkrankheiten, die es bei seiner letztjährigen Erstverwendung hatte, so gut wie möglich zu befreien. Namentlich verbesserten wir Druck- und andere Fehler, versuchten Ungereimtheiten in der Notation zu beseitigen, erneuerten die Plots zur besseren Lesbarkeit und gaben dem Übungsteil ein einheitlicheres Gewand. Mit der Hoffnung, dadurch dem Zweck des Kurses gerechter zu werden, wünschen wir den Studienanfängern, an welche sich dieses Skript richtet, einen erfolgreichen Start an der hiesigen Alma Mater.

Basel, 5. August 2009 Sebastian Knüsli und Christian Stohrer

2 Basics

Zahlbereiche

Was für Arten von Zahlen kennen wir?



- Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
  In ihnen funktionieren $+$ und $\cdot$.
- Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
  In ihnen funktionieren $+$, $\cdot$ und $-$.
- Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$
  In ihnen funktionieren $+$, $\cdot$, $-$ und : dazu!

  Aber **ACHTUNG**! Division durch 0 ist verboten!

  Man kann zeigen, dass nicht alle Zahlen auf der Zahlengerade rationale Zahlen sind. Darum brauchen wir noch
- Reelle Zahlen: $\mathbb{R} =$ "Die ganze Zahlengerade"
  In ihnen funktionieren $+$, $\cdot$, $-$, : und man kann Wurzeln ziehen (was man in $\mathbb{Q}$ a priori nicht kann, z.B. ist $\sqrt{2}$ nicht in $\mathbb{Q}$) und man findet verrückte Zahlen wie das Verhältnis zwischen Kreisumfang und Kreisdurchmesser, π, oder e, die Eulersche Zahl, die man in $\mathbb{Q}$ vergebens sucht.

  Aber **ACHTUNG**! Wurzelziehen aus negativen Zahlen ist in $\mathbb{R}$ nicht erlaubt!

Grundgesetze

Rufen wir uns einige Grundgesetze in Erinnerung:

- Kommutativität: $a+b = b+a \qquad ab = ba$
- Assoziativität: $(a+b)+c = a+(b+c) \qquad (ab)c = a(bc)$
- Distributivität: $a(b+c) = ab+ac \qquad (a+b)c = ac+bc$

Potenzgesetze:

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{n+m} \\ a^m b^m &= (ab)^m \\ (a^m)^n &= a^{m\cdot n} \\ a^{\frac{1}{m}} &= \sqrt[m]{a} \\ a^{-m} &= \frac{1}{a^m} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \frac{a^m}{b^m} \end{aligned}$$

Binomische Formeln:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2 \end{aligned}$$

3 Lösen von Gleichungen

Einfache Gleichung

Wir beginnen mit einer simplen Gleichung. Dafür seien m und b zwei reelle Zahlen. Wir setzen zudem voraus, dass $m \neq 0$ ist:

$$mx+b = 0.$$

Gesucht ist x. Wir dürfen die Gleichung umformen, indem wir auf beiden Seiten der Gleichung immer die selbe Zahl addieren/subtrahieren/multplizieren/dividieren, bis x alleine dasteht:

$$\begin{aligned} mx+b &= 0 && \mid -b \\ mx &= -b && \mid : m \\ x &= -\frac{b}{m} \end{aligned}$$

Quadratische Gleichung

Bei einer allgemeinen quadratischen Gleichung haben wir drei Parameter a, b und c:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Um eine Lösungsformel herleiten zu können, setzen wir voraus, dass einerseits $a \neq 0$ und $b^2 - 4ac \geq 0$ gilt. Damit hat die obige Gleichung zwei Lösungen x_1, x_2, gegeben durch die Formel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Vieta

Wenn $a = 1$ und die Lösungen ganzzahlig sind, kann man sie leicht selbst ersehen: Seien m und n die Lösungen. Dann muss

$$x^2 + bx + c = (x - m)(x - n) = x^2 - (m + n)x + mn$$

sein. Also gilt der

Satz von Vieta. *Seien m, n Lösungen von $x^2 + bx + c = 0$. Dann ist*

$$\begin{aligned} b &= -(m + n) \\ c &= mn. \end{aligned}$$

Beispiel. Wir wollen $x^2 + x - 12 = 0$ lösen. Zuerst zerlegen wir -12 in Faktoren. Möglich sind:

$$\pm(1, -12),\ \pm(2, -6) \text{ und } \pm(3, -4).$$

Dann kontrollieren wir, ob die negative Summe einer Kombination 1 ergibt und werden mit $(3, -4)$ fündig.

$$\text{Test:} \qquad (x - (-4))(x - 3) = x^2 + x - 12 \qquad \checkmark$$

Einfache Gleichungssysteme

Wir wollen eine gemeinsame Lösung der Gleichungen

$$2x + 3y = 5, \tag{1}$$
$$x + 2y = 4, \tag{2}$$

finden. Dafür kennen wir drei Verfahren:

Einsetzungsverfahren

Man löst eine Gleichung nach einer Variablen auf und setzt diese in die andere Gleichung ein: Im obigen Beispiel lösen wir zum Beispiel (2) nach x auf,

$$x + 2y = 4 \Rightarrow x = 4 - 2y,$$

und setzen dies in (1) ein. Wir erhalten damit

$$2(4 - 2y) + 3y = 5 \Rightarrow y = 3$$

und nach Einsetzen von y in eine der ursprünglichen Gleichungen erhalten wir $x = -2$.

Bemerkung. Man kann genauso gut die Gleichung (1) nach einer der Variablen x oder y auflösen und in (2) einsetzen. Die Lösung ist dieselbe!

Gleichsetzungsverfahren

Wir formen die Gleichungen so um, dass bei beiden auf einer Seite dasselbe steht und setzen dies gleich:

- Die Gleichung (1) machen wir zu $2x = 5 - 3y$.
- Die Gleichung (2) multiplizieren wir mit 2 und erhalten $2x + 4y = 8$.

  Dies formen wir um zu $2x = 8 - 4y$.

Gleichsetzen liefert

$$8 - 4y = 5 - 3y \Rightarrow y = 3$$

und weiter wie zuvor.

Additionsverfahren

Man multipliziert die Gleichungen mit geschickt gewählten Zahlen, so dass Unbekannte wegfallen, wenn man die Gleichungen anschliessend addiert: Wenn wir (2) mit -2 multiplizieren, erhalten wir das System

$$2x + 3y = 5, \tag{1}$$

$$-2x - 4y = -8. \tag{2'}$$

Jetzt addieren wir die zweite Gleichung (2') zur ersten (1) hinzu und erhalten

$$-y = -3 \Rightarrow y = 3$$

und weiter wie zuvor.

4 Zahlenfolgen

Als *Zahlenfolge* bezeichnet man eine unendliche Folge von Zahlen.

Beispiel (Ein paar einfache Zahlenfolgen)**.**

1. $\{1, 2, 3, 4, ...\}$,
2. $\{2, 4, 6, 8, ...\}$,
3. $\{2, 4, 8, 16, ...\}$,
4. $\{1, -1, 1, -1, ...\}$,
5. eine konstante Folge: $\{2, 2, 2, 2, ...\}$,
6. eine wilde Folge ohne erkennbare Gesetzmässigkeit: $\{1, 500, 49, 60, \frac{1}{5}, 33, ...\}$.

Allgemein schreibt man eine Zahlenfolge $\{a_1, a_2, a_3, a_4, ...\}$ oder kurz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei a_i als *i-tes Glied* der Folge bezeichnet wird.

Beispiel. Das 3. Glied in der zweiten Beispielfolge ist 6.

Wenn es eine Gesetzmässigkeit gibt, kann man die Folge vielleicht einfacher durch eine Vorschrift für a_n angeben. Für unsere Beispiele gilt für das n-te Glied:

1. $a_n = n$,
2. $a_n = 2n$,
3. $a_n = 2^n$,
4. $a_n = (-1)^{n+1}$,
5. $a_n = 2$.

Man schreibt dann zum Beispiel die 3. Folge auf als $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Bei Beispiel 6 gibt es kein einfaches Bildungsgesetz, welches einem just ins Auge springt.

Es gibt noch eine zweite Variante um eine Folge zu definieren, nämlich mit einer sogenannten *rekursiven Definition.* Dafür legt man einerseits den Startwert (also den Wert für a_1) fest und gibt zusätzlich noch eine Vorschrift an, wie man von einem bestimmten Glied der Zahlenfolge aus das nächste berechnen kann. Für unsere Beispiele sieht dies folgendermassen aus:

1. $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + 1$,
2. $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = a_n + 2$,
3. $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = 2a_n$,
4. $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = -a_n$,
5. $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = a_n$.

Mit Hilfe der rekursiven Definition können wir zwei spezielle Arten von Folgen charakterisieren:

Definition. (Arithmetische, geometrische Folgen)

- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *arithmetisch*, wenn es ein $d \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_{n+1} = a_n + d$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *geometrisch*, wenn es ein $q \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_{n+1} = a_n \cdot q$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir kürzen arithmetische Folgen mit AF und geometrische Folgen mit GF ab. Beispiele 1 und 2 sind AFs, mit $d = 1$ bzw. 2, Beispiele 3 und 4 sind GFs, mit $q = 2$ bzw -1.

Mit Folgen kann man auch rechnen. Die Regeln dafür lauten:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} - (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \frac{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}{(b_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

wobei Letzteres natürlich nur erlaubt ist, wenn $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

5 Grenzwerte

Wir betrachten nun die Folge

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots\right\}.$$

Was fällt auf? Alle Glieder sind positiv und je weiter man in der Folge nach hinten geht, desto kleiner werden sie. Bei genauer Betrachtung sieht man, dass sie beliebig nahe an 0 rankommen, wenn man nur genug weit nach hinten geht. Dieses "beliebig nahe" kann man mathematisch genau ausformulieren, allerdings würde dies hier den Rahmen sprengen.

Es gibt viele solcher Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die sich, je weiter man nach hinten geht, immer näher an eine Zahl a annähern. Ist dies der Fall, so sagt man $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* mit dem *Grenzwert* (oder *Limes*) a, in kompakter Schreibweise

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

manchmal auch nur kurz

$$a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

Beispiel. (Grenzwerte)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Grenzwert hat, sagt man, dass die Folge *divergiert.* Alle unsere Beispiele divergieren, bis auf das Beispiel 5. Dieses konvergiert mit Limes 2, was ziemlich klar sein dürfte.

Gesetze für konvergierende Folgen. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergierende Folgen mit Limites a bzw. b. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n - b_n = a - b,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Natürlich setzen wir beim letzten Fall $b \neq 0, b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraus.

Damit können wir nun den Grenzwert für die Folge $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ berechnen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1.$$

Beispiel (Grenzwert für eine etwas kompliziertere Folge)**.** Wir fragen uns ob die Folge

$$\left(\frac{n^2+n-1}{3n^2+2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert und wenn ja, gegen was?

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-1}{3n^2+2n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})}{n^2(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\cancelto{0}{\frac{1}{n}}-\cancelto{0}{\frac{1}{n^2}}}{3+\cancelto{0}{\frac{2}{n}}+\cancelto{0}{\frac{1}{n^2}}} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

6 Vollständige Induktion

Wie sieht wohl die Vorschrift für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch

$$a_1 = 0 \text{ und } a_{n+1} = a_n + 2n$$

rekursiv definiert ist, aus? Wir schreiben dazu die ersten paar Glieder auf:

$$\{0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, ...\}.$$

Nach langem Nachdenken sieht man, dass da $\{1^2 - 1, 2^2 - 2, 3^2 - 3, 4^2 - 4, ...\}$ steht. Unsere Vermutung: $a_n = n^2 - n$.

Wie beweist man die Richtigkeit dieser Vermutung?

Beweis durch vollständige Induktion

Man beweist, dass die Aussage für $n = 1$ stimmt (Induktionsverankerung). Danach beweist man dass die Aussage für $n + 1$ stimmt, *unter der Annahme,* dass sie für n stimmt (Induktionsannahme). Dieses Schliessen von n auf $n + 1$ wird als Induktionsschritt bezeichnet.

Warum beweist dies die ganze Formel? Wenn es für $n = 1$ stimmt, so stimmt es für $n = 2$ wegen dem Induktionsschritt. Aber wenn es für $n = 2$ stimmt, dann auch für $n = 3$, wiederum wegen dem Induktionsschritt, usw. Aber für $n = 1$ stimmt es ja sicher, wegen der Induktionsverankerung!

Beispiel (Induktionsbeweis)**.**

Induktionsverankerung ($n = 1$): Gemäss Definition der Folge ist $a_1 = 0 = 1^2 - 1$.

Induktionsannahme (IA): Für ein n gelte, dass $a_n = n^2 - n$.

Induktionsschritt: Unter dieser Annahme beweisen wir, dass die Formel für $n + 1$ stimmt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2n \overset{\text{(IA)}}{=} n^2 - n + 2n \\ &= n^2 + n \\ &= n(n+1) \\ &= (n+1)n + (n+1) - (n+1) \\ &= (n+1)(n+1) - (n+1) = (n+1)^2 - (n+1). \end{aligned}$$

□

(**Bemerkung:** Das kleine Quadrat rechts kennzeichnet das Ende eines Beweises.)

7 Reihen

Summenschreibweise

Wir haben n Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ und wollen diese zusammenzählen. Wir sind aber zu faul um immer $a_1 + a_2 + ... + a_n$ zu schreiben. Darum führen wir folgende abkürzende

Schreibweise ein:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \;:=\; a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Hier ist i der *Laufindex*, 1 die *untere Grenze*, n die *obere Grenze* und die a_i geben an, was wir zusammenzählen.

Beispiel. Wollen wir die ersten n ungeraden Zahlen zusammenzählen, so schreiben wir nicht mehr $1 + 3 + ... + (2n - 1)$, sondern

$$\sum_{i\,=\,1}^{n} (2i - 1).$$

Hierbei vergewissere man sich selbst, dass $2i - 1$ die i-te ungerade Zahl ist.

Oder die Summe der ersten n Quadrate: $1 + 4 + 9 + ... + n^2$ heisst ab jetzt

$$\sum_{i\,=\,1}^{n} i^2.$$

Reihen

Mit dieser Schreibweise können wir aus jeder Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine neue Folge basteln, nämlich $(\sum_{k\,=\,1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$, die Folge, deren n-tes Glied die Summe der ersten n Glieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Wenn diese Folge konvergiert, so bezeichnet man ihren Grenzwert mit $\sum_{k\,=\,1}^{\infty} a_k$ und nennt dies die *Reihe* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Das n-te Glied der neuen Folge nennen wir *n-te Partialsumme* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und bezeichnen es mit S_n.

Beispiel (Partialsummen)**.**

Für arithmetische Folgen (AF) gilt: $\quad S_n \;=\; \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n).$

Für geometrische Folgen (GF) gilt: $\quad S_n \;=\; a_1\dfrac{1 - q^n}{1 - q} \;=\; a_1\dfrac{q^n - 1}{q - 1}.$

Beispiel (Geometrische Reihe für $q \;=\; \frac{1}{2}$)**.** Wir wollen

$$\sum_{n\,=\,1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$$

berechnen. Dies ist die Reihe der geometrischen Folge mit $a_1 = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{2}$. Gemäss oben gilt

$$S_n \;=\; \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \;=\; 1 - \frac{1}{2^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Also ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Man kann daraus folgendes sehen:

Geometrische Reihe. *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine GF mit* $|q| < 1$. *Dann gilt für die zugehörige Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

8 Funktionen

Wir kommen nun zu einem der wichtigsten Gegenstände der Mathematik, der Funktion.

Definition (Funktionen)**.** Eine *Funktion* f ist eine Vorschrift, die einer Zahl x genau eine Zahl y zuordnet. Man schreibt dann $y = f(x)$, manchmal auch $f : x \mapsto y$ ("f wirft x auf y").
x heisst das *Argument* der Funktion. Die x-Werte, denen sich durch die Funktion y-Werte zuordnen lassen, bilden den *Definitionsbereich* $\mathbb{D}$ der Funktion. Der Zielraum, also die Menge in welcher die y-Werte liegen können, heisst Wertebereich $\mathbb{W}$. Wenn es nötig ist, Definitions- und Wertebereich anzugeben, schreibt man f wie folgt:

$$f : \begin{cases} \mathbb{D} & \to & \mathbb{W} \\ x & \mapsto & y \end{cases}.$$

Man beachte, dass nicht alle Werte im Wertebereich angenommen werden müssen. Das bedeutet, dass es im Wertebereich auch Werte gibt auf welche kein einziges x aus dem Definitionsbereich geschickt wird. Daher kann es zu derselben Funktion verschiedene mögliche Wertebereiche geben. Man kann aber noch genauer sagen, wohin ein x aus dem Definitionsbereich abgebildet wird. Denn diejenigen Werte des Wertebereichs, welche tatsächlich angenommen werden, bilden den sogenannten Bildbereich $\mathbb{B}$. Wir wollen noch zwei Eigenschaften festhalten:

- Der Bildbereich ist im Wertebereich enthalten.
- Der Bildbereich ist der kleinstmögliche Wertebereich für eine gegebene Funktion f und einen zugehörigen Definitionsbereich $\mathbb{D}$.

Beispiel ($x^2, \sqrt{x}, \frac{1}{x}$)**.**

- Sei f die Funktion, die einer Zahl ihr Quadrat zuordnet. Weil man jeder Zahl ihr Quadrat zuordnen kann, dürfen wir $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ nehmen. Das Quadrat einer reellen Zahl ist sicherlich wieder eine reelle Zahl. Deshalb können wir ebenfalls $\mathbb{W} = \mathbb{R}$ wählen. Für $\mathbb{B}$ gilt: $\mathbb{B} = \mathbb{R}_{\geq 0}$, denn alle Quadrate sind ja grösser oder gleich 0 und jede solche Zahl wird auch angenommen (man kann ja die Wurzel ziehen). f wird beschrieben durch

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad \text{und es gilt: } \mathbb{B} = \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

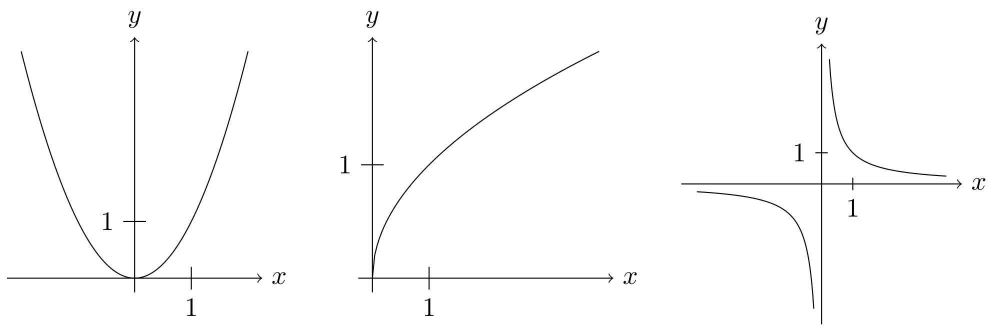
- Sei g die Funktion, die einer Zahl ihre Quadratwurzel zuordnet. Weil Quadratwurzeln aus negativen Zahlen nicht definiert sind, müssen wir $\mathbb{D} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ wählen. Die Wurzel einer solchen Zahl ist wiederum sicherlich reell. Daher können wir $\mathbb{W} = \mathbb{R}$ wählen. Da genau alle nichtnegativen Zahlen Quadratwurzeln sind, ist $\mathbb{B} = \mathbb{R}_{\geq 0}$. g wird beschrieben durch

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\geq 0} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right. \qquad \text{und es gilt: } \mathbb{B} = \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

- Sei h die Funktion, die einer Zahl ihren Kehrwert zuordnet. Weil durch 0 teilen verboten ist, nehmen wir $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, die reellen Zahlen ohne 0, und weil 0 die einzige reelle Zahl ist, die kein Kehrwert einer weiteren Zahl ist, ist $\mathbb{B}$ dieselbe Menge. h wird beschrieben durch

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right. \qquad \text{und es gilt: } \mathbb{B} = \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Funktionen kann man gut im kartesischen Koordinatensystem darstellen, indem man als x-Koordinaten Punkte aus $\mathbb{D}$ und als y-Koordinaten die zugehörigen Werte aus $\mathbb{W}$ verwendet.



(a) $f : x \mapsto x^2$ (b) $g : x \mapsto \sqrt{x}$ (c) $h : x \mapsto \frac{1}{x}$

So ein Bild nennt man den *Graph* einer Funktion.

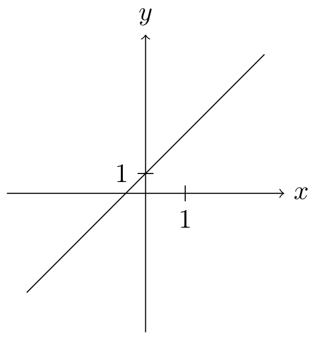
Lineare Funktionen

Eine erste Klasse von Funktionen, die wir untersuchen, sind die linearen Funktionen, definiert durch

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & mx + b \end{cases},$$

wobei $m \neq 0$ und b reelle Zahlen sind.

Beispiel ($m = 2, b = 1$)**.** Wir sehen, dass der Graph der Funktion eine Gerade ist. m ist die *Steigung* der Geraden und b die Höhe, auf der die Funktion die y-Achse schneidet. Sie wird als *y-Achsenabschnitt* bezeichnet.



Eine Zahl $x_0 \in \mathbb{D}$ mit $f(x_0) = 0$ nennt man *Nullstelle*. Lineare Funktionen haben genau eine Nullstelle. In unserem Beispiel muss gelten $0 = 2x_0 + 1$, also ist $x_0 = -\frac{1}{2}$ die Nullstelle. Allgemein muss gelten $0 = mx_0 + b$, also ist die Nullstelle im allgemeinen Fall $x_0 = -\frac{b}{m}$.

Wie finden wir die Steigung einer Funktion raus, wenn wir nur zwei Punkte $P = (x_1, y_1)$ und $Q = (x_2, y_2)$ auf ihrem Graphen kennen? Es muss gelten

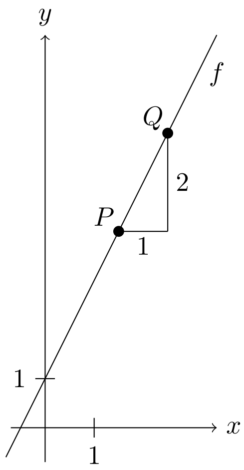
$$y_1 = mx_1 + b, \quad y_2 = mx_2 + b.$$

Wir subtrahieren die erste Gleichung von der zweiten Gleichung und erhalten

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

und so

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Wir sehen, dass die Steigung gerade das Verhältnis zwischen der vertikalen und der horizontalen Kathete des eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecks ist. So ein Dreieick wird als *Steigungsdreieck* bezeichnet.

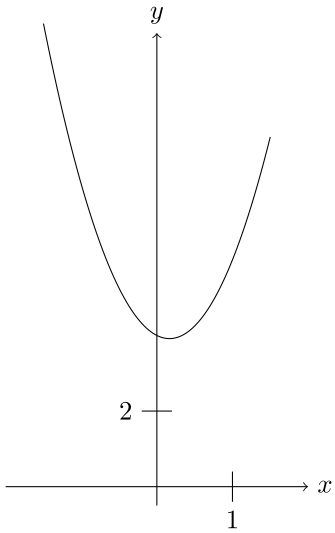
Polynome

Polynome sind Funktionen bestehend aus Summen von Vielfachen von natürlichen Potenzen. Ihr Definitionsbereich ist immer $\mathbb{R}$.

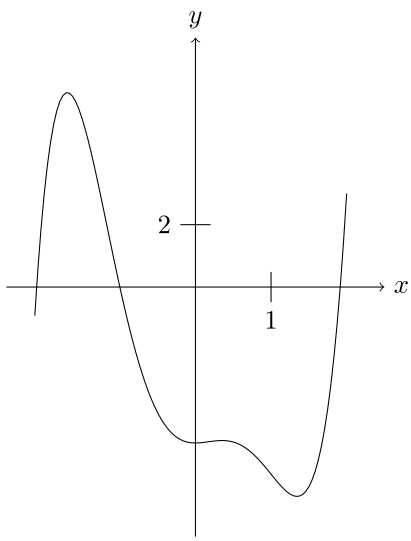
Beispiel (Polynome)**.**

(a) $f : x \mapsto 3x^2 - x + 4$

(b) $g : x \mapsto x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 5$



(a) $f : x \mapsto 3x^2 - x + 4$



(b) $g : x \mapsto x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 5$

Allgemein schreibt man Polynome folgendermassen:

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$.

Die a_i werden als *Koeffizienten* bezeichnet. Man ordnet die Potenzen ihrer Grösse nach. Die höchste vorkommende Potenz bezeichnet man als *Grad* des Polynoms. Wenn ein Polynom p Grad d hat, so sagt man p ist von *Ordnung* d, oder von d-ter Ordnung.

Beispiel (Grad)**.** Die Polynome von Grad 1 sind gerade die linearen Funktionen.

Wenn d der Grad eines Polynoms ist, so kann es höchstens d Nullstellen haben. Die Bestimmung der Nullstellen kann sehr schwierig werden. Für Polynome 1. Ordnung haben wir das im vorherigen Abschnitt gesehen. Für Polynome 2. Ordnung gibt es die Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Für Polynome 3. Ordnung gibt es einen Trick, wenn man eine der drei Nullstellen schon kennt: Die Polynomdivision.

Polynomdivision

Sei $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Sei x_0 eine Nullstelle von p. Dann können wir

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = q(x) \cdot (x - x_0)$$

schreiben, wobei $q(x)$ ein Polynom 2. Ordnung ist, dessen zwei Nullstellen gerade die anderen beiden Nullstellen von p sind. Wie erhält man q?

Wir machen den Ansatz $q(x) = ax^2 + bx + c$ und erhalten

$$\begin{aligned} a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 &= (ax^2 + bx + c) \cdot (x - x_0) \\ &= ax^3 + (b - x_0a)x^2 + (c - x_0b)x - x_0c \end{aligned}$$

und so, durch sukzessiven Vergleich der Koeffizienten,

$$\begin{aligned} a &= a_3, \\ b &= a_3x_0 + a_2, \\ c &= a_3x_0^2 + a_2x_0 + a_1. \end{aligned}$$

Für Polynome höherer Ordnung wird es noch schwieriger. Meist muss man den Computer zu Hilfe nehmen.

Gebrochenrationale Funktionen

Seien p, q Polynome und $q_1, q_2, ..., q_d$ die Nullstellen von q. Dann gibt es eine Funktion

$$r : \begin{cases} \mathbb{R}\backslash\{q_1, q_2, ..., q_d\} & \rightarrow & \mathbb{W} \\ x & \mapsto & \frac{p(x)}{q(x)} \end{cases} .$$

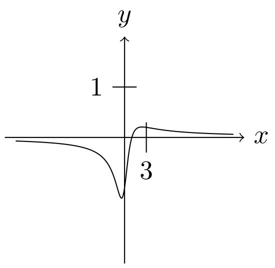
Funktionen von dieser Bauart nennt man *gebrochenrationale Funktionen*. Die Nullstellen von q müssen wir vom Definitionsbereich ausschliessen, weil Division durch 0 nicht erlaubt ist.

Beispiel (Einige gebrochenrationale Funktionen)**.**

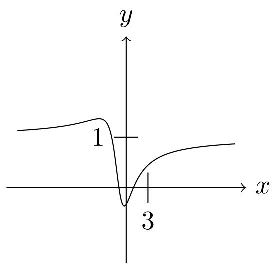
(a) $f : x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}$

(b) $g : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+2x+3}$

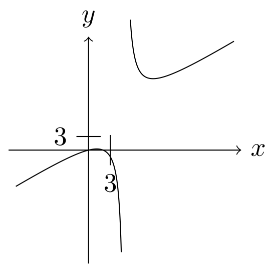
(c) $h : x \mapsto \frac{x^3-2x^2}{x^2-5x}$



(a) $f : x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}$



(b) $g : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+2x+3}$



(c) $h : x \mapsto \frac{x^3-2x^2}{x^2-5x}$