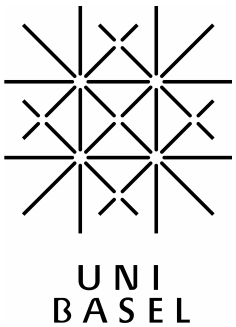
Vorkurs Mathematik

01. – 05. September 2025

Flavio Dalessi, Florian Lanz, Carina Santos,
Timo Schlüter, Remo von Rickenbach



Skript geschrieben von Sebastian Knüsli und Christian Stohrer,
ergänzt und verbessert von Manuela Utzinger, Dennis Tröndle,
Jet Hoe Tang und Carina Santos.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

Skript 2

2 Basics **3**

3 Lösen von Gleichungen **4**

4 Zahlenfolgen **7**

5 Grenzwerte **8**

6 Vollständige Induktion **9**

7 Reihen **10**

8 Funktionen **12**

9 Trigonometrische Funktionen **21**

10 Exponentialfunktion und Logarithmen **23**

11 Differentiation **26**

12 Integration **30**

13 Lösen von Gleichungssystemen **36**

14 Vektoren **39**

15 Geraden in Ebene und Raum **42**

16 Ebenen im Raum **45**

17 Kombinatorik **50**

18 Wahrscheinlichkeitslehre **55**

1 Einleitung

"In mathematics you don't understand things. You just get used to them."
John von Neumann

Ein schwieriges Fach, diese Mathematik. Selbst anerkannten Grössen solche Zeilen wie oben abringend, erstaunt es kaum, dass sie dem Normalsterblichen Respekt, wenn nicht gar Furcht einflösst. Diese Sachen abzubauen, diese Gewöhnung an die Mathematik zu fördern, sind die Ziele dieses Kurses. Wir haben ihn nicht geschrieben um dem ambitionierten Primus einen Haufen neuer Erkenntnisse zu präsentieren. Die behandelten Gegenstände sind das, was ein/e Maturand/in nach unserem Ermessen in der Schule kennengelernt haben sollte. Wir haben den Kurs geschrieben im Gedanken an Leute, die vielleicht keine guten Erinnerungen an die Schulmathematik haben, die Mühe hatten und sich jetzt trotzdem, vielleicht sogar nach ein, zwei Jahren Mathe-Abstinenz, an ein naturwissenschaftliches Studium wagen, was wir toll finden. Diese Leute auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen, Lücken aufzuzeigen und vielleicht auzufüllen, Furcht zu nehmen, auf dass an der Uni unbeschwerter losgelegt werden kann, ist unser Ziel. Manches wird altbekannt und einfach erscheinen, anderes ist vielleicht ganz neu. Wie das dem Kurs zugrundeliegende Skript. Orientiert haben wir uns an den Unterlagen der bisherigen Vorkurse, die von Jonas Budmiger, Jan Draisma und Johannes Lieberherr verfasst wurden. Wir danken ihnen für das zur Verfügung stellen ihres Materials, welches uns eine grosse Hilfe beim Auf-die-Beine-stellen des Kurses war. Der, wenn er seinen Zweck erfüllt, den ersten Satz des Zitats ein wenig widerlegt.

Basel, 8. September 2008 Sebastian Knüsli und Christian Stohrer

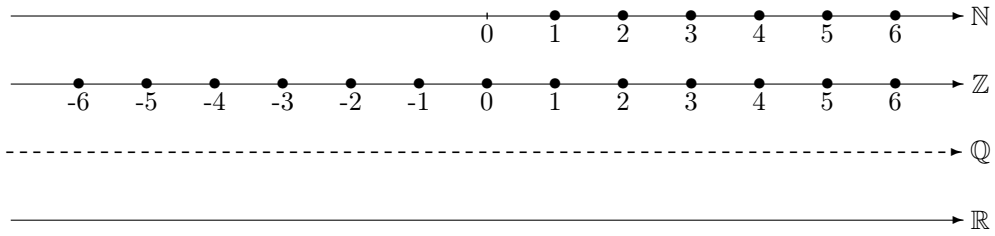
Die Idee und der Aufbau des Kurses sind die gleichen wie im letzten Jahr. Das Skript haben wir jedoch einer Kur unterzogen um es von den Kinderkrankheiten, die es bei seiner letztjährigen Erstverwendung hatte, so gut wie möglich zu befreien. Namentlich verbesserten wir Druck- und andere Fehler, versuchten Ungereimtheiten in der Notation zu beseitigen, erneuerten die Plots zur besseren Lesbarkeit und gaben dem Übungsteil ein einheitlicheres Gewand. Mit der Hoffnung, dadurch dem Zweck des Kurses gerechter zu werden, wünschen wir den Studienanfängern, an welche sich dieses Skript richtet, einen erfolgreichen Start an der hiesigen Alma Mater.

Basel, 5. August 2009 Sebastian Knüsli und Christian Stohrer

2 Basics

Zahlbereiche

Was für Arten von Zahlen kennen wir?



- Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
  In ihnen funktionieren $+$ und $\cdot$.
- Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
  In ihnen funktionieren $+$, $\cdot$ und $-$.
- Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$
  In ihnen funktionieren $+$, $\cdot$, $-$ und $:$ dazu!

  Aber **ACHTUNG**! Division durch 0 ist verboten!

  Man kann zeigen, dass nicht alle Zahlen auf der Zahlengerade rationale Zahlen sind. Darum brauchen wir noch

- Reelle Zahlen: $\mathbb{R} =$ "Die ganze Zahlengerade"
  In ihnen funktionieren $+$, $\cdot$, $-$, $:$ und man kann Wurzeln ziehen (was man in $\mathbb{Q}$ a priori nicht kann, z.B. ist $\sqrt{2}$ nicht in $\mathbb{Q}$) und man findet verrückte Zahlen wie das Verhältnis zwischen Kreisumfang und Kreisdurchmesser, π, oder e, die Eulersche Zahl, die man in $\mathbb{Q}$ vergebens sucht.

  Aber **ACHTUNG**! Wurzelziehen aus negativen Zahlen ist in $\mathbb{R}$ nicht erlaubt!

Grundgesetze

Rufen wir uns einige Grundgesetze in Erinnerung:

- Kommutativität: $a+b = b+a$ $\qquad ab = ba$
- Assoziativität: $(a+b)+c = a+(b+c)$ $\qquad (ab)c = a(bc)$
- Distributivität: $a(b+c) = ab+ac$ $\qquad (a+b)c = ac+bc$

Potenzgesetze:

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{n+m} \\ a^m b^m &= (ab)^m \\ (a^m)^n &= a^{m\cdot n} \\ a^{\frac{1}{m}} &= \sqrt[m]{a} \\ a^{-m} &= \frac{1}{a^m} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \frac{a^m}{b^m} \end{aligned}$$

Binomische Formeln:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2 \end{aligned}$$

3 Lösen von Gleichungen

Einfache Gleichung

Wir beginnen mit einer simplen Gleichung. Dafür seien m und b zwei reelle Zahlen. Wir setzen zudem voraus, dass $m \neq 0$ ist:

$$mx+b = 0.$$

Gesucht ist x. Wir dürfen die Gleichung umformen, indem wir auf beiden Seiten der Gleichung immer die selbe Zahl addieren/subtrahieren/multplizieren/dividieren, bis x alleine dasteht:

$$\begin{aligned} mx+b &= 0 && \mid -b \\ mx &= -b && \mid : m \\ x &= -\frac{b}{m} \end{aligned}$$

Quadratische Gleichung

Bei einer allgemeinen quadratischen Gleichung haben wir drei Parameter a, b und c:

$$ax^2 + bx + c \;=\; 0.$$

Um eine Lösungsformel herleiten zu können, setzen wir voraus, dass einerseits $a \neq 0$ und $b^2 - 4ac \geq 0$ gilt. Damit hat die obige Gleichung zwei Lösungen x_1, x_2, gegeben durch die Formel

$$x_{1,2} \;=\; \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Vieta

Wenn $a \;=\; 1$ und die Lösungen ganzzahlig sind, kann man sie leicht selbst ersehen: Seien m und n die Lösungen. Dann muss

$$x^2 + bx + c \;=\; (x - m)(x - n) \;=\; x^2 - (m + n)x + mn$$

sein. Also gilt der

Satz von Vieta. *Seien m, n Lösungen von $x^2 + bx + c \;=\; 0$. Dann ist*

$$\begin{aligned} b &\;=\; -(m + n) \\ c &\;=\; mn. \end{aligned}$$

Beispiel. Wir wollen $x^2 + x - 12 \;=\; 0$ lösen. Zuerst zerlegen wir -12 in Faktoren. Möglich sind:

$$\pm(1, -12),\ \pm(2, -6) \text{ und } \pm\,(3, -4).$$

Dann kontrollieren wir, ob die negative Summe einer Kombination 1 ergibt und werden mit $(3, -4)$ fündig.

$$\text{Test:} \qquad (x - (-4))(x - 3) \;=\; x^2 + x - 12 \qquad \checkmark$$

Einfache Gleichungssysteme

Wir wollen eine gemeinsame Lösung der Gleichungen

$$2x + 3y \;=\; 5, \tag{1}$$
$$x + 2y \;=\; 4, \tag{2}$$

finden. Dafür kennen wir drei Verfahren:

Einsetzungsverfahren

Man löst eine Gleichung nach einer Variablen auf und setzt diese in die andere Gleichung ein: Im obigen Beispiel lösen wir zum Beispiel (2) nach x auf,

$$x + 2y \;=\; 4 \;\Rightarrow\; x \;=\; 4 - 2y,$$

und setzen dies in (1) ein. Wir erhalten damit

$$2(4 - 2y) + 3y \;=\; 5 \;\Rightarrow\; y \;=\; 3$$

und nach Einsetzen von y in eine der ursprünglichen Gleichungen erhalten wir $x \;=\; -2$.

Bemerkung. Man kann genauso gut die Gleichung (1) nach einer der Variablen x oder y auflösen und in (2) einsetzen. Die Lösung ist dieselbe!

Gleichsetzungsverfahren

Wir formen die Gleichungen so um, dass bei beiden auf einer Seite dasselbe steht und setzen dies gleich:

- Die Gleichung (1) machen wir zu $2x \;=\; 5 - 3y$.
- Die Gleichung (2) multiplizieren wir mit 2 und erhalten $2x + 4y \;=\; 8$.

  Dies formen wir um zu $2x \;=\; 8 - 4y$.

Gleichsetzen liefert

$$8 - 4y \;=\; 5 - 3y \;\Rightarrow\; y \;=\; 3$$

und weiter wie zuvor.

Additionsverfahren

Man multipliziert die Gleichungen mit geschickt gewählten Zahlen, so dass Unbekannte wegfallen, wenn man die Gleichungen anschliessend addiert: Wenn wir (2) mit -2 multiplizieren, erhalten wir das System

$$\begin{aligned} 2x + 3y \;&=\; 5, && (1)\\ -2x - 4y \;&=\; -8. && (2')\end{aligned}$$

Jetzt addieren wir die zweite Gleichung (2') zur ersten (1) hinzu und erhalten

$$-y \;=\; -3 \;\Rightarrow\; y \;=\; 3$$

und weiter wie zuvor.

4 Zahlenfolgen

Als *Zahlenfolge* bezeichnet man eine unendliche Folge von Zahlen.

Beispiel (Ein paar einfache Zahlenfolgen)**.**

1. $\{1, 2, 3, 4, ...\}$,
2. $\{2, 4, 6, 8, ...\}$,
3. $\{2, 4, 8, 16, ...\}$,
4. $\{1, -1, 1, -1, ...\}$,
5. eine konstante Folge: $\{2, 2, 2, 2, ...\}$,
6. eine wilde Folge ohne erkennbare Gesetzmässigkeit: $\{1, 500, 49, 60, \frac{1}{5}, 33, ...\}$.

Allgemein schreibt man eine Zahlenfolge $\{a_1, a_2, a_3, a_4, ...\}$ oder kurz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei a_i als *i-tes Glied* der Folge bezeichnet wird.

Beispiel. Das 3. Glied in der zweiten Beispielfolge ist 6.

Wenn es eine Gesetzmässigkeit gibt, kann man die Folge vielleicht einfacher durch eine Vorschrift für a_n angeben. Für unsere Beispiele gilt für das n-te Glied:

1. $a_n = n$,
2. $a_n = 2n$,
3. $a_n = 2^n$,
4. $a_n = (-1)^{n+1}$,
5. $a_n = 2$.

Man schreibt dann zum Beispiel die 3. Folge auf als $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Bei Beispiel 6 gibt es kein einfaches Bildungsgesetz, welches einem just ins Auge springt.

Es gibt noch eine zweite Variante um eine Folge zu definieren, nämlich mit einer sogenannten *rekursiven Definition*. Dafür legt man einerseits den Startwert (also den Wert für a_1) fest und gibt zusätzlich noch eine Vorschrift an, wie man von einem bestimmten Glied der Zahlenfolge aus das nächste berechnen kann. Für unsere Beispiele sieht dies folgendermassen aus:

1. $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + 1$,
2. $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = a_n + 2$,
3. $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = 2a_n$,
4. $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = -a_n$,
5. $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = a_n$.

Mit Hilfe der rekursiven Definition können wir zwei spezielle Arten von Folgen charakterisieren:

Definition. (Arithmetische, geometrische Folgen)

- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *arithmetisch*, wenn es ein $d \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_{n+1} = a_n + d$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *geometrisch*, wenn es ein $q \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_{n+1} = a_n \cdot q$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir kürzen arithmetische Folgen mit AF und geometrische Folgen mit GF ab. Beispiele 1 und 2 sind AFs, mit $d = 1$ bzw. 2, Beispiele 3 und 4 sind GFs, mit $q = 2$ bzw -1.

Mit Folgen kann man auch rechnen. Die Regeln dafür lauten:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} - (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \frac{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}{(b_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

wobei Letzteres natürlich nur erlaubt ist, wenn $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

5 Grenzwerte

Wir betrachten nun die Folge

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots\right\}.$$

Was fällt auf? Alle Glieder sind positiv und je weiter man in der Folge nach hinten geht, desto kleiner werden sie. Bei genauer Betrachtung sieht man, dass sie beliebig nahe an 0 rankommen, wenn man nur genug weit nach hinten geht. Dieses "beliebig nahe" kann man mathematisch genau ausformulieren, allerdings würde dies hier den Rahmen sprengen.

Es gibt viele solcher Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die sich, je weiter man nach hinten geht, immer näher an eine Zahl a annähern. Ist dies der Fall, so sagt man $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* mit dem *Grenzwert* (oder *Limes*) a, in kompakter Schreibweise

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

manchmal auch nur kurz

$$a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

Beispiel. (Grenzwerte)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Grenzwert hat, sagt man, dass die Folge *divergiert*. Alle unsere Beispiele divergieren, bis auf das Beispiel 5. Dieses konvergiert mit Limes 2, was ziemlich klar sein dürfte.

Gesetze für konvergierende Folgen. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergierende Folgen mit Limites a bzw. b. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n - b_n = a - b,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Natürlich setzen wir beim letzten Fall $b \neq 0, b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraus.

Damit können wir nun den Grenzwert für die Folge $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ berechnen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1.$$

Beispiel (Grenzwert für eine etwas kompliziertere Folge)**.** Wir fragen uns ob die Folge

$$\left(\frac{n^2+n-1}{3n^2+2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert und wenn ja, gegen was?

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-1}{3n^2+2n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})}{n^2(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}-\overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}}{3+\underset{\to 0}{\frac{2}{n}}+\underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

6 Vollständige Induktion

Wie sieht wohl die Vorschrift für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch

$$a_1 = 0 \text{ und } a_{n+1} = a_n + 2n$$

rekursiv definiert ist, aus? Wir schreiben dazu die ersten paar Glieder auf:

$$\{0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, ...\}.$$

Nach langem Nachdenken sieht man, dass da $\{1^2 - 1, 2^2 - 2, 3^2 - 3, 4^2 - 4, ...\}$ steht. Unsere Vermutung: $a_n = n^2 - n$.

Wie beweist man die Richtigkeit dieser Vermutung?

Beweis durch vollständige Induktion

Man beweist, dass die Aussage für $n = 1$ stimmt (Induktionsverankerung). Danach beweist man dass die Aussage für $n + 1$ stimmt, *unter der Annahme,* dass sie für n stimmt (Induktionsannahme). Dieses Schliessen von n auf $n + 1$ wird als Induktionsschritt bezeichnet.

Warum beweist dies die ganze Formel? Wenn es für $n = 1$ stimmt, so stimmt es für $n = 2$ wegen dem Induktionsschritt. Aber wenn es für $n = 2$ stimmt, dann auch für $n = 3$, wiederum wegen dem Induktionsschritt, usw. Aber für $n = 1$ stimmt es ja sicher, wegen der Induktionsverankerung!

Beispiel (Induktionsbeweis)**.**

Induktionsverankerung ($n = 1$): Gemäss Definition der Folge ist $a_1 = 0 = 1^2 - 1$.

Induktionsannahme (IA): Für ein n gelte, dass $a_n = n^2 - n$.

Induktionsschritt: Unter dieser Annahme beweisen wir, dass die Formel für $n + 1$ stimmt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2n \overset{\text{(IA)}}{=} n^2 - n + 2n \\ &= n^2 + n \\ &= n(n+1) \\ &= (n+1)n + (n+1) - (n+1) \\ &= (n+1)(n+1) - (n+1) = (n+1)^2 - (n+1). \end{aligned}$$

□

(**Bemerkung:** Das kleine Quadrat rechts kennzeichnet das Ende eines Beweises.)

7 Reihen

Summenschreibweise

Wir haben n Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ und wollen diese zusammenzählen. Wir sind aber zu faul um immer $a_1 + a_2 + ... + a_n$ zu schreiben. Darum führen wir folgende abkürzende

Schreibweise ein:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ := \ a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Hier ist i der *Laufindex*, 1 die *untere Grenze*, n die *obere Grenze* und die a_i geben an, was wir zusammenzählen.

Beispiel. Wollen wir die ersten n ungeraden Zahlen zusammenzählen, so schreiben wir nicht mehr $1 + 3 + ... + (2n - 1)$, sondern

$$\sum_{i \, = \, 1}^{n} (2i - 1).$$

Hierbei vergewissere man sich selbst, dass $2i - 1$ die i-te ungerade Zahl ist.

Oder die Summe der ersten n Quadrate: $1 + 4 + 9 + ... + n^2$ heisst ab jetzt

$$\sum_{i \, = \, 1}^{n} i^2.$$

Reihen

Mit dieser Schreibweise können wir aus jeder Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine neue Folge basteln, nämlich $(\sum_{k \, = \, 1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$, die Folge, deren n-tes Glied die Summe der ersten n Glieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Wenn diese Folge konvergiert, so bezeichnet man ihren Grenzwert mit $\sum_{k \, = \, 1}^{\infty} a_k$ und nennt dies die *Reihe* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Das n-te Glied der neuen Folge nennen wir *n-te Partialsumme* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und bezeichnen es mit S_n.

Beispiel (Partialsummen)**.**

Für arithmetische Folgen (AF) gilt: $S_n \ = \ \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$

Für geometrische Folgen (GF) gilt: $S_n \ = \ a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \ = \ a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$

Beispiel (Geometrische Reihe für $q \ = \ \frac{1}{2}$)**.** Wir wollen

$$\sum_{n \, = \, 1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ = \ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$$

berechnen. Dies ist die Reihe der geometrischen Folge mit $a_1 = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{2}$. Gemäss oben gilt

$$S_n \ = \ \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \ = \ 1 - \frac{1}{2^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Also ist

$$\sum_{n\,=\,1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \;=\; 1.$$

Man kann daraus folgendes sehen:

Geometrische Reihe. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine GF mit $|q| < 1$. Dann gilt für die zugehörige Reihe*

$$\sum_{n\,=\,1}^{\infty} a_n \;=\; \frac{a_1}{1-q}.$$

8 Funktionen

Wir kommen nun zu einem der wichtigsten Gegenstände der Mathematik, der Funktion.

Definition (Funktionen)**.** Eine *Funktion* f ist eine Vorschrift, die einer Zahl x genau eine Zahl y zuordnet. Man schreibt dann $y = f(x)$, manchmal auch $f : x \mapsto y$ ("f wirft x auf y").
x heisst das *Argument* der Funktion. Die x-Werte, denen sich durch die Funktion y-Werte zuordnen lassen, bilden den *Definitionsbereich* $\mathbb{D}$ der Funktion. Der Zielraum, also die Menge in welcher die y-Werte liegen können, heisst Wertebereich $\mathbb{W}$. Wenn es nötig ist, Definitions- und Wertebereich anzugeben, schreibt man f wie folgt:

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \to & \mathbb{W} \\ x & \mapsto & y \end{array} \right. .$$

Man beachte, dass nicht alle Werte im Wertebereich angenommen werden müssen. Das bedeutet, dass es im Wertebereich auch Werte gibt auf welche kein einziges x aus dem Definitionsbereich geschickt wird. Daher kann es zu derselben Funktion verschiedene mögliche Wertebereiche geben. Man kann aber noch genauer sagen, wohin ein x aus dem Definitionsbereich abgebildet wird. Denn diejenigen Werte des Wertebereichs, welche tatsächlich angenommen werden, bilden den sogenannten Bildbereich $\mathbb{B}$. Wir wollen noch zwei Eigenschaften festhalten:

- Der Bildbereich ist im Wertebereich enthalten.
- Der Bildbereich ist der kleinstmögliche Wertebereich für eine gegebene Funktion f und einen zugehörigen Definitionsbereich $\mathbb{D}$.

Beispiel $(x^2, \sqrt{x}, \frac{1}{x})$**.**

- Sei f die Funktion, die einer Zahl ihr Quadrat zuordnet. Weil man jeder Zahl ihr Quadrat zuordnen kann, dürfen wir $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ nehmen. Das Quadrat einer reellen Zahl ist sicherlich wieder eine reelle Zahl. Deshalb können wir ebenfalls $\mathbb{W} = \mathbb{R}$ wählen. Für $\mathbb{B}$ gilt: $\mathbb{B} = \mathbb{R}_{\geq 0}$, denn alle Quadrate sind ja grösser oder gleich 0 und jede solche Zahl wird auch angenommen (man kann ja die Wurzel ziehen). f wird beschrieben durch

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad \text{und es gilt: } \mathbb{B} = \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

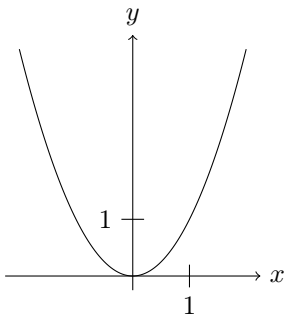
- Sei g die Funktion, die einer Zahl ihre Quadratwurzel zuordnet. Weil Quadratwurzeln aus negativen Zahlen nicht definiert sind, müssen wir $\mathbb{D} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ wählen. Die Wurzel einer solchen Zahl ist wiederum sicherlich reell. Daher können wir $\mathbb{W} = \mathbb{R}$ wählen. Da genau alle nichtnegativen Zahlen Quadratwurzeln sind, ist $\mathbb{B} = \mathbb{R}_{\geq 0}$. g wird beschrieben durch

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\geq 0} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right. \qquad \text{und es gilt: } \mathbb{B} = \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

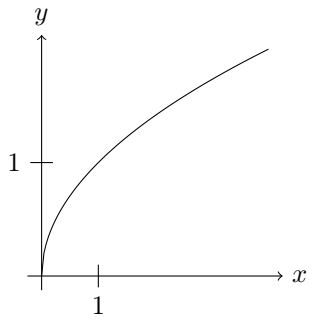
- Sei h die Funktion, die einer Zahl ihren Kehrwert zuordnet. Weil durch 0 teilen verboten ist, nehmen wir $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, die reellen Zahlen ohne 0, und weil 0 die einzige reelle Zahl ist, die kein Kehrwert einer weiteren Zahl ist, ist $\mathbb{B}$ dieselbe Menge. h wird beschrieben durch

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right. \qquad \text{und es gilt: } \mathbb{B} = \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

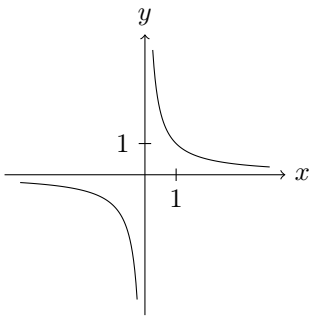
Funktionen kann man gut im kartesischen Koordinatensystem darstellen, indem man als x-Koordinaten Punkte aus $\mathbb{D}$ und als y-Koordinaten die zugehörigen Werte aus $\mathbb{W}$ verwendet.



(a) $f : x \mapsto x^2$



(b) $g : x \mapsto \sqrt{x}$



(c) $h : x \mapsto \frac{1}{x}$

So ein Bild nennt man den *Graph* einer Funktion.

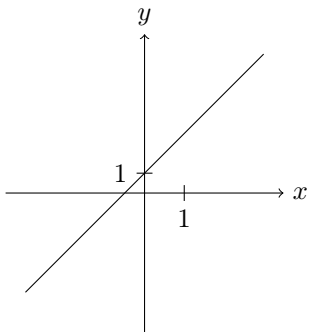
Lineare Funktionen

Eine erste Klasse von Funktionen, die wir untersuchen, sind die linearen Funktionen, definiert durch

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & mx + b \end{cases},$$

wobei $m \neq 0$ und b reelle Zahlen sind.

Beispiel ($m = 2, b = 1$)**.** Wir sehen, dass der Graph der Funktion eine Gerade ist. m ist die *Steigung* der Geraden und b die Höhe, auf der die Funktion die y-Achse schneidet. Sie wird als *y-Achsenabschnitt* bezeichnet.



Eine Zahl $x_0 \in \mathbb{D}$ mit $f(x_0) = 0$ nennt man *Nullstelle*. Lineare Funktionen haben genau eine Nullstelle. In unserem Beispiel muss gelten $0 = 2x_0 + 1$, also ist $x_0 = -\frac{1}{2}$ die Nullstelle. Allgemein muss gelten $0 = mx_0 + b$, also ist die Nullstelle im allgemeinen Fall $x_0 = -\frac{b}{m}$.

Wie finden wir die Steigung einer Funktion raus, wenn wir nur zwei Punkte $P = (x_1, y_1)$ und $Q = (x_2, y_2)$ auf ihrem Graphen kennen? Es muss gelten

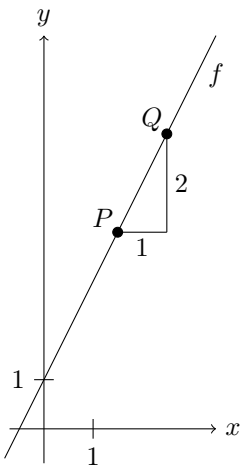
$$y_1 = mx_1 + b, \quad y_2 = mx_2 + b.$$

Wir subtrahieren die erste Gleichung von der zweiten Gleichung und erhalten

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

und so

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Wir sehen, dass die Steigung gerade das Verhältnis zwischen der vertikalen und der horizontalen Kathete des eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecks ist. So ein Dreieick wird als *Steigungsdreieck* bezeichnet.

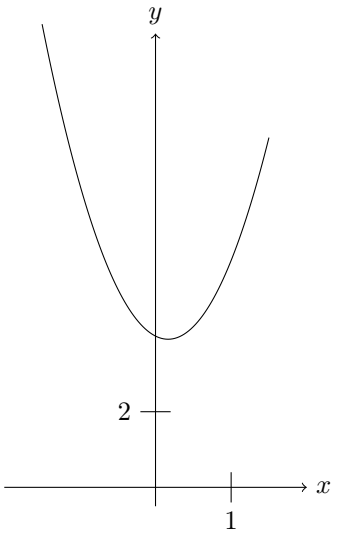
Polynome

Polynome sind Funktionen bestehend aus Summen von Vielfachen von natürlichen Potenzen. Ihr Definitionsbereich ist immer $\mathbb{R}$.

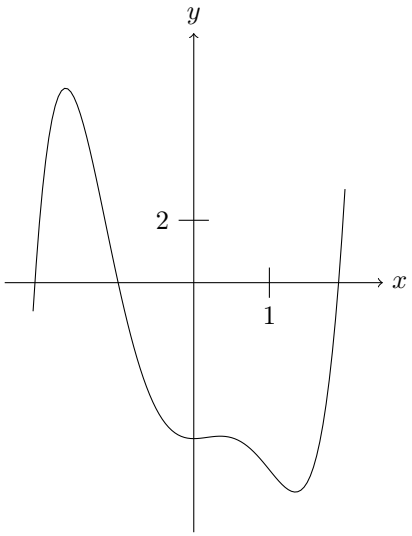
Beispiel (Polynome)**.**

(a) $f : x \mapsto 3x^2 - x + 4$

(b) $g : x \mapsto x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 5$



(a) $f : x \mapsto 3x^2 - x + 4$



(b) $g : x \mapsto x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 5$

Allgemein schreibt man Polynome folgendermassen:

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$.

Die a_i werden als *Koeffizienten* bezeichnet. Man ordnet die Potenzen ihrer Grösse nach. Die höchste vorkommende Potenz bezeichnet man als *Grad* des Polynoms. Wenn ein Polynom p Grad d hat, so sagt man p ist von *Ordnung* d, oder von d-ter Ordnung.

Beispiel (Grad)**.** Die Polynome von Grad 1 sind gerade die linearen Funktionen.

Wenn d der Grad eines Polynoms ist, so kann es höchstens d Nullstellen haben. Die Bestimmung der Nullstellen kann sehr schwierig werden. Für Polynome 1. Ordnung haben wir das im vorherigen Abschnitt gesehen. Für Polynome 2. Ordnung gibt es die Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Für Polynome 3. Ordnung gibt es einen Trick, wenn man eine der drei Nullstellen schon kennt: Die Polynomdivision.

Polynomdivision

Sei $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Sei x_0 eine Nullstelle von p. Dann können wir

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = q(x) \cdot (x - x_0)$$

schreiben, wobei $q(x)$ ein Polynom 2. Ordnung ist, dessen zwei Nullstellen gerade die anderen beiden Nullstellen von p sind. Wie erhält man q?

Wir machen den Ansatz $q(x) = ax^2 + bx + c$ und erhalten

$$\begin{aligned} a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 &= (ax^2 + bx + c) \cdot (x - x_0) \\ &= ax^3 + (b - x_0a)x^2 + (c - x_0b)x - x_0c \end{aligned}$$

und so, durch sukzessiven Vergleich der Koeffizienten,

$$\begin{aligned} a &= a_3, \\ b &= a_3x_0 + a_2, \\ c &= a_3x_0^2 + a_2x_0 + a_1. \end{aligned}$$

Für Polynome höherer Ordnung wird es noch schwieriger. Meist muss man den Computer zu Hilfe nehmen.

Gebrochenrationale Funktionen

Seien p, q Polynome und $q_1, q_2, ..., q_d$ die Nullstellen von q. Dann gibt es eine Funktion

$$r : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{q_1, q_2, ..., q_d\} & \to & \mathbb{W} \\ x & \mapsto & \frac{p(x)}{q(x)} \end{array} \right. .$$

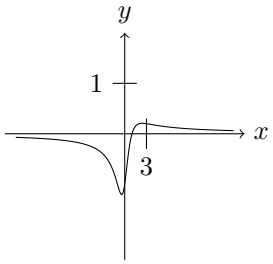
Funktionen von dieser Bauart nennt man *gebrochenrationale Funktionen*. Die Nullstellen von q müssen wir vom Definitionsbereich ausschliessen, weil Division durch 0 nicht erlaubt ist.

Beispiel (Einige gebrochenrationale Funktionen)**.**

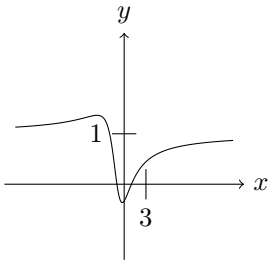
(a) $f : x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}$

(b) $g : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+2x+3}$

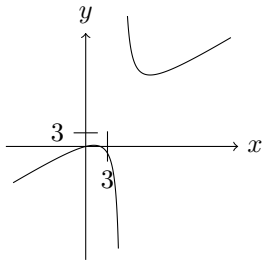
(c) $h : x \mapsto \frac{x^3-2x^2}{x^2-5x}$



(a) $f : x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}$



(b) $g : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+2x+3}$



(c) $h : x \mapsto \frac{x^3-2x^2}{x^2-5x}$

In den Nullstellen der Nenner sind gebrochenrationale Funktionen nicht definiert, rundherum aber schon. Wir können untersuchen, was passiert, wenn wir beliebig nahe an einen solche Nennernullstelle rangehen.

Dies tut man, indem man aus der Funktion eine Folge bastelt. Nennen wir die Funktion f und die Nullstelle s. Man nimmt eine Folge mit Grenzwert s (z.B. $(s+\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$) und schaut, was passiert, wenn man die Funktion drauf anwendet, d.h. das Verhalten der Folge $(f(s+\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel ($r(x)=\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$)**.** Wir finden die Nullstellen des Zählers und des Nenners heraus. Für den Zähler erhalten wir $x=1$ und $x=-1$, für den Nenner $x=-3$ und $x=1$. Wir können r also wiefolgt schreiben:

$$r(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}.$$

Zuerst untersuchen wir $s=-3$ mit einer Folge, die von oben nach s geht: z.B. $(-3+\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} r\left(-3+\frac{1}{n}\right) &= \frac{(-3+\frac{1}{n}-1)(-3+\frac{1}{n}+1)}{(-3+\frac{1}{n}-1)(-3+\frac{1}{n}+3)} = \frac{-2+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \\ &= -2n+1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty. \end{aligned} \tag{1}$$

Was passiert, wenn wir eine Folge nehmen, die von unten nach s geht, z.B. $(-3-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$?

$$\begin{aligned} r\left(-3-\frac{1}{n}\right) &= \frac{(-3-\frac{1}{n}-1)(-3-\frac{1}{n}+1)}{(-3-\frac{1}{n}-1)(-3-\frac{1}{n}+3)} = \frac{-2-\frac{1}{n}}{\frac{-1}{n}} \\ &= 2n+1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \end{aligned} \tag{2}$$

Wir sehen, dass da nicht dasselbe rauskommt.

(1) bezeichnet man als *rechtsseitigen Grenzwert*,

$$\lim_{x\searrow s} r(x),$$

(2) als *linksseitigen Grenzwert* oder kurz

$$\lim_{x\nearrow s} r(x).$$

Eine solche Nullstelle des Nenners, bei der die Grenzwerte $\pm\infty$ sind (auch *uneigentliche Grenzwerte* genannt) nennt man *Polstelle*. Die vertikale Gerade durch die Nullstelle nennt man (vertikale) *Asymptote*.

Nun untersuchen wir $s = 1$. Zuerst ist

$$\lim_{x \searrow 1} r(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n}-1)(1+\frac{1}{n}+1)}{(1+\frac{1}{n}-1)(1+\frac{1}{n}+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2+\frac{1}{n})}{(4+\frac{1}{n})} = \frac{1}{2}$$

und dann, ähnlich,

$$\lim_{x \nearrow 1} r(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{1}{n}-1)(1-\frac{1}{n}+1)}{(1-\frac{1}{n}-1)(1-\frac{1}{n}+3)} = \frac{1}{2}.$$

Der links- und rechtsseitige Grenzwert ist derselbe. Eine solche Nennernullstelle heisst *Unbestimmtheitsstelle* (sie wird in der Mathematik auch mit dem komplizierteren Begriff *hebbare Singularität* bezeichnet).

Diese Untersuchung kann man bei einer Funktion f an einer beliebigen Stelle s durchführen. Wenn der Grenzwert von beiden Seiten her kommend derselbe ist, sagen wir c, dann nennen wir dies den Grenzwert von f bei s und schreiben

$$\lim_{x\to s} f(x) = c.$$

Uneigentliche Grenzwerte

Eine Form von uneigentlichen Grenzwerten haben wir bei den Polstellen schon kennengelernt. Eine andere Form taucht beim Betrachten des Verhaltens einer gebrochenrationalen Funktion f für $x \to \pm\infty$ auf. Dieses untersucht man z.B. mit den Folgen $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(-n)_{n\in\mathbb{N}}$ und schreibt, wenn so ein Grenzwert c existiert,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c.$$

Achtung: c kann sehr wohl $\pm\infty$ sein!

Verhalten einer Funktion für $x \to \pm\infty$

Sei f eine gebrochenrationale Funktion, Z der Grad des Zählers, N der Grad des Nenners. Es gibt drei Fälle:

$N > Z$**:**

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

$N < Z$**:**

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

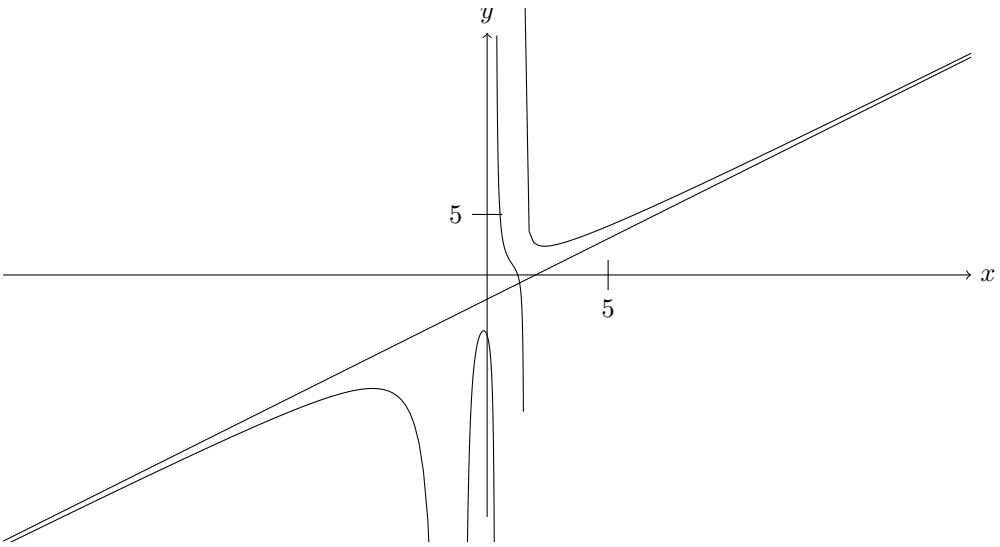
(Was genau auf welcher Seite geschieht muss untersucht werden!)

$N = Z$**:**

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a_Z}{a_N}$$

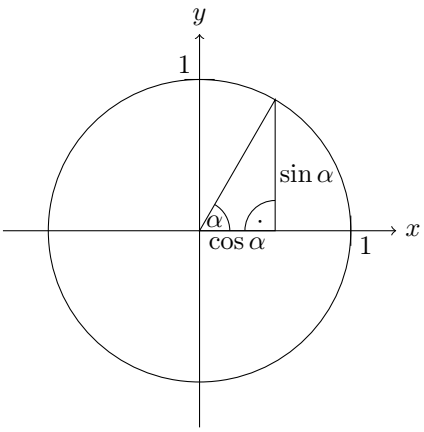
wobei a_Z der erste Koeffizient des Zählers und a_N der erste Koeffizient des Nenners ist.

Im letzten Fall heisst die horizontale Linie mit der Höhe $\frac{a_Z}{a_N}$ *(horizontale) Asymptote.* Im Spezialfall $Z = N + 1$ kann man mittels Polynomdivision eine schräge Asymptote finden.



$$x \mapsto \frac{x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5}{x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 1} \qquad \text{(mit Asymptote)}$$

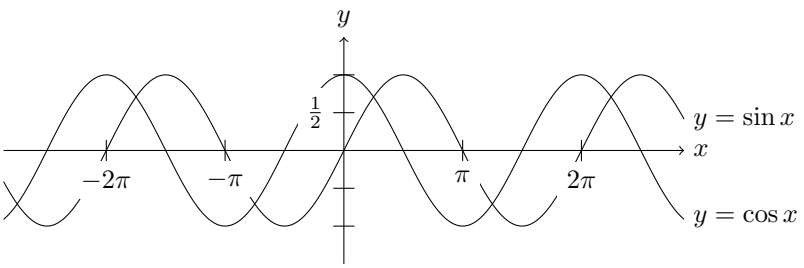
9 Trigonometrische Funktionen



Wir schreiben dem Einheitskreis, wie oben dargestellt, ein rechtwinkliges Dreieck ein. Wir denken uns den Winkel α im Bogenmass und definieren:

$\sin\alpha :=$ Länge der Gegenkathete (Sprechweise: „Der Sinus von α“),
$\cos\alpha :=$ Länge der Ankathete (Sprechweise: „Der Cosinus von α“).

Dies sind beides Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $[-1, 1]$. Eine Funktion heisst *periodisch mit Periode* T falls $f(x + T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}$. Weil wir nach einer Drehung der Hypotenuse um den Ursprung um den Winkel 2π dasselbe Dreieck erhalten wie vorher, müssen Sinus und Cosinus 2π-periodisch sein. Sie sehen so aus:



Wir sehen, dass der Cosinus gerade der Sinus um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben ist:

$$\cos x \;=\; \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Wegen dem Satz von Pythagoras erhalten wir vom Bild des Einheitskreises

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \;=\; 1 \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Andere wichtige Formeln:

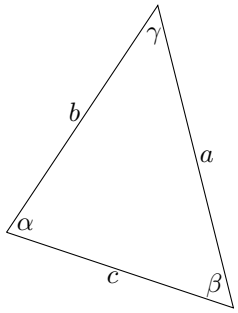
$$\begin{aligned}\sin\alpha \pm \beta &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,\\ \cos\alpha \pm \beta &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

Schliesslich gilt in allgemeinen Dreiecken

$$\text{Sinussatz: } \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

und

$$\text{Cosinussatz: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

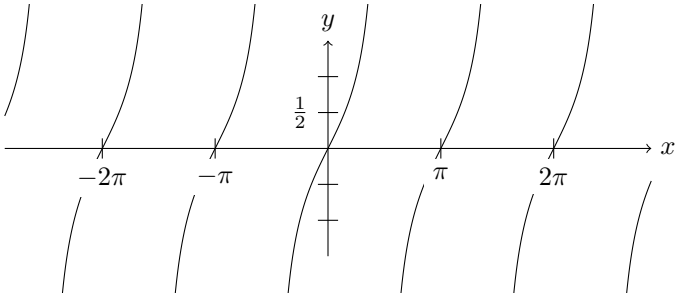


Diese beiden Sätze dienen dazu, aus bekannten Seiten und Winkeln die unbekannten abzuleiten.

Ferner definiert man als Tangens

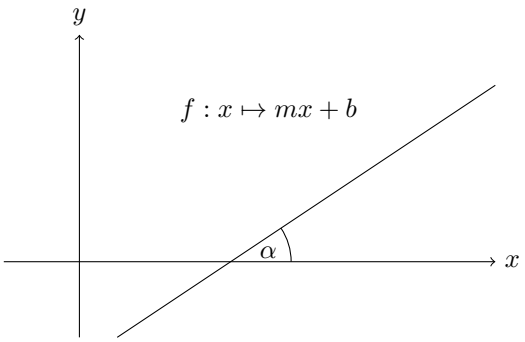
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

das Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete. Auch der Tangens ist periodisch, jedoch hat er eine kürzere Periode, nämlich π. Bis auf die Nullstellen des Cosinus ist der Tangens auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.



$y = \tan x$

Der Tangens ist wichtig für die Steigungsbestimmung. Für eine Gerade gegeben durch $y = mx + b$ gilt nämlich $m = \tan\alpha$, wo α wie im Bild ist.

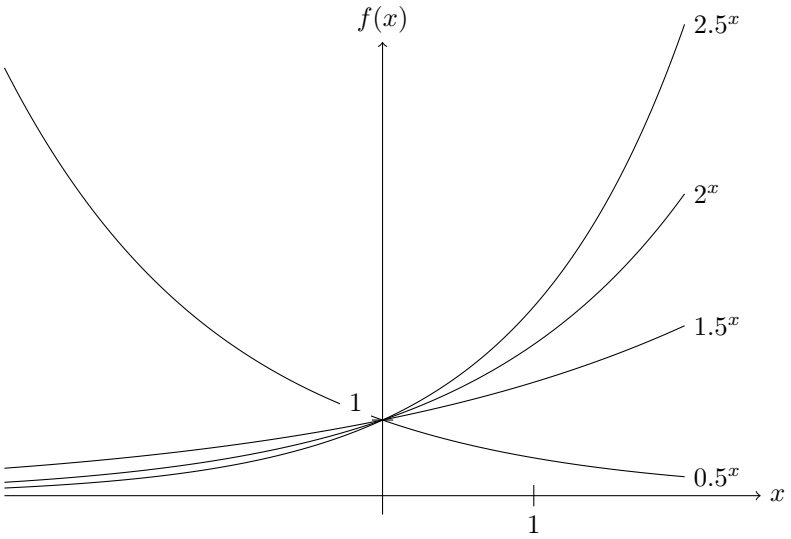


10 Exponentialfunktion und Logarithmen

Exponentialfunktionen

Als Exponentialfunktion bezeichnet man eine Funktion des Typs

$$f : x \mapsto a^{cx}, \quad a \in \mathbb{R}_{\geq 0}, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$



$f : x \mapsto a^x$ mit $a = 0.5,\ 1.5,\ 2,\ 2.5$

Die Zahl a heisst hierbei *Basis*, die Variable x der *Exponent*. Anhand des Bilds sieht man, dass $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{B} = \mathbb{R}_{>0}$ (für $a \neq 1$). Somit kann man jede positive Zahl b schreiben als $b = a^c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Dies ermöglicht uns verschiedene Exponentialfunktionen durch einander auszudrücken:

$$b^x = a^{cx}.$$

Deshalb darf man sich beim Studium von Exponentialfunktionen auf *eine* Basis beschränken. Wir wählen $a = e$, die Eulersche Zahl, weil sie besonders schöne Eigenschaften hat, wie wir später sehen werden. Wer e noch nicht kennt: Man kann sie definieren durch

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

und sie hat ungefähr den Wert $e = 2.718281828459....$

Exponentialfunktionen werden oft zum Beschreiben von Wachstum und Zerfall benutzt. Bei $c > 0$ hat man Wachstum, bei $c < 0$ Zerfall.

Logarithmus

Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

Definition (Umkehrfunktion)**.** Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$. Falls es eine Funktion $g : \mathbb{W} \to \mathbb{D}$ gibt so dass $g(f(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{D}$ und $f(g(y)) = y$ für alle $y \in \mathbb{W}$, so heisst f *umkehrbar* und g *Umkehrfunktion* von f.

Wir bezeichnen den Logarithmus mit log. Also gilt

$$\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$$

sowie

$$e^{\log x} = x \qquad \text{und} \qquad \log e^x = x.$$

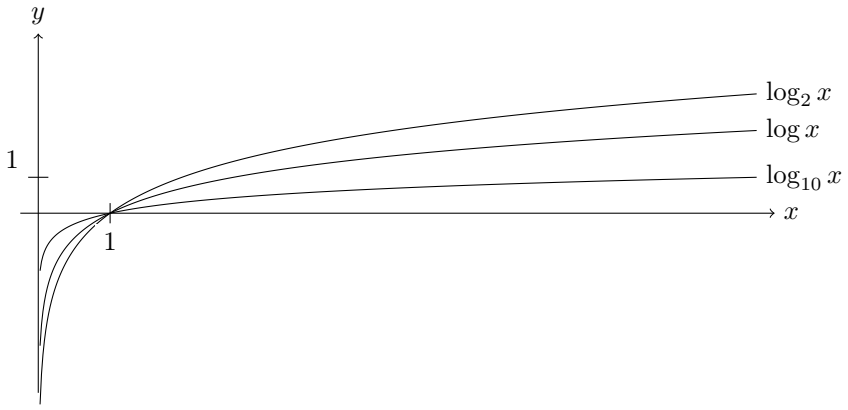
Der Logarithmus von x ist also gerade die Zahl, mit der man e potenzieren muss, um x zu erhalten. Man kann den Logarithmus aber nicht nur zur Basis e definieren: Man bezeichnet die Zahl mit der man eine Zahl a potenzieren muss, um x zu erhalten als $\log_a x$ (Sprechweise: "Logarithmus von x zur Basis a.").

Aber ähnlich wie bei der Exponentialfunktion gibt es keine grossen Unterschiede zwischen den verschieden Logarithmen. Es gilt nämlich

$$x \;=\; a^{\log_a x}.$$

Da $b = a^{\log_a b}$ gilt auch

$$x \;=\; b^{\log_b x} \;=\; \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b x} \;=\; a^{\log_a b \cdot \log_b x}$$



Logarithmus zu den Basen 10, 2 und e.

und daraus folgern wir

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x.$$

Die verschieden Logarithmen unterscheiden sich also nur um einen Faktor. Wir werden fortan nur noch mit dem Logarithmus zur Basis e arbeiten. Dieser wird auch *natürlicher Logarithmus* genannt.

Wir fassen die Rechenregeln für den Logarithmus kurz zusammen:

$$\begin{aligned} \log(ab) &= \log a + \log b, \\ \log\left(\frac{a}{b}\right) &= \log a - \log b, \\ \log(a^r) &= r \log a. \end{aligned}$$

Beispiel (Halbwertszeit)**.** Der Fischbestand in der Nordsee sei momentan C. Die Fischer arbeiten so, dass sich der Bestand der Fische durch die Funktion $f(t) = Ce^{-\lambda t}$ beschreiben lässt, wobei λ eine positive Zahl ist. Wir haben also einen negativen Exponenten, deshalb einen Zerfallsprozess und ferner ist $f(0)$ tatsächlich C, die Funktion macht also Sinn. Wir fragen nun nach der Zeit T, die es braucht, um die Nordsee auf die Hälfte der Fische hinunterzufischen. Es muss gelten

$$Ce^{-\lambda T} = \frac{C}{2},$$

also

$$e^{-\lambda T} = \frac{1}{2},$$

und so, nachdem man auf beiden Seiten logarithmiert,

$$-\lambda T = \log\frac{1}{2} = \log 1 - \log 2 = -\log 2$$

und letztlich

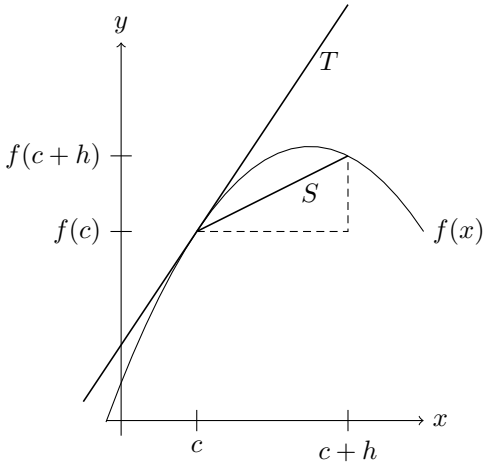
$$T = \frac{\log 2}{\lambda}.$$

11 Differentiation

Differenzierbarkeit

Wir wollen die Steigung einer Funktion f in einem bestimmten Punkt c untersuchen, wobei wir unter der Steigung von f in c die Steigung der Tangente T an f durch $(c, f(c))$ verstehen. Wie finden wir die Tangentensteigung m_T?

Wir nehmen einen Punkt $c + h$, ein wenig von c entfernt, und legen die Sekante S durch die Punkte $(c, f(c))$ und $(c + h, f(c + h))$, die auf dem Graph von f liegen. Die



Steigung von S beträgt

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{c + h - c} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}. \tag{1}$$

Die Gleichung (1) wird als *Differenzenquotient* bezeichnet. Je mehr wir nun mit h gegen 0 gehen, desto mehr nähert sich S an T, und damit nähert sich (1) auch an die gesuchte Steigung m_T an. Es gilt

$$m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} =: f'(c).$$

Wir nennen $f'(c)$ die *Ableitung von f an der Stelle c* oder auch *Differentialquotient* und wir sagen f ist *differenzierbar* in c. Auf allen Punkten wo f differenzierbar ist definiert f also eine neue Funktion f', die wir die *Ableitung* von f nennen. Manchmal wird f' auch $\frac{df}{dx}$ geschrieben. Sie ist die *Steigungsfunktion* von f.

Beispiel. Wir wollen $f : x \mapsto x^2$ in $c \in \mathbb{D}$ differenzieren. Wir beginnen mit

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \frac{(c+h)^2-c^2}{h} = \frac{c^2+2hc+h^2-c^2}{h} = 2c+h.$$

Nun lassen wir h gegen 0 gehen:

$$\lim_{h\to 0} 2c+h = 2c.$$

Da $c \in \mathbb{D}$ beliebig war, ist f also überall differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = 2x.$$

Genau wie f kann man f' ableiten. Man nennt die so erhaltene Funktion *zweite Ableitung* von f und schreibt f''. Analog kann man die n-te Ableitung $f^{(n)}$ definieren.

Ableitungsregeln

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (cf)' = c \cdot f', \quad c \in \mathbb{R}$$
$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (c)' = 0, \quad c \in \mathbb{R}$$

Damit können wir Polynome ableiten:

Beispiel.

$$(x^5+3x^2+1)' = (x^5)' + 3(x^2)' + (1)' = 5x^4 + 3 \cdot 2x = 5x^4 + 6x$$

Produkt- und Quotientenregel

$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ wo } v \neq 0$$

Beispiel.

$$\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

Ableitungen einiger wichtiger Funktionen

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \overset{\text{Quot.-regel}}{=} \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(e^x)' = e^x \quad \text{(Darum nimmt man } e \text{ als Basis für Exponentialfunktionen!)}$$

Kettenregel

Seien f, g zwei Funktionen. Wir können, sofern g in $\mathbb{D}$ von f landet, eine neue Funktion h basteln, indem wir f und g aneinanderhängen. Zuerst wenden wir g auf x an und dann f auf die Zahl die wir erhalten haben:

$$h(x) := f(g(x)).$$

Wie sieht die Ableitung von h aus? Es gilt:

$$h'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x). \qquad \textit{(Kettenregel)}$$

Beispiel (Ableitung von $\sin(x^2)$)**.** Es seien

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & (f'(x) &= \cos x) \\ g(x) &= x^2, & (g'(x) &= 2x) \\ h(x) = f(g(x)) &= \sin x^2. \end{aligned}$$

Also ist die Ableitung von h:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2.$$

Man nennt $f'(g(x))$ die *äussere Ableitung* und $g'(x)$ die *innere Ableitung*. Merkregel für die Kettenregel:

„Äussere Ableitung mal innere Ableitung."

Achtung: Die äussere Ableitung hat als Argument $g(x)$, nicht x!

Beispiel. Mit Hilfe der Kettenregel können wir die Ableitung des Logarithmus bestimmen:

$$\begin{aligned} e^{\log x} &= x, \\ \left(e^{\log x}\right)' &= 1. \end{aligned}$$

Aber

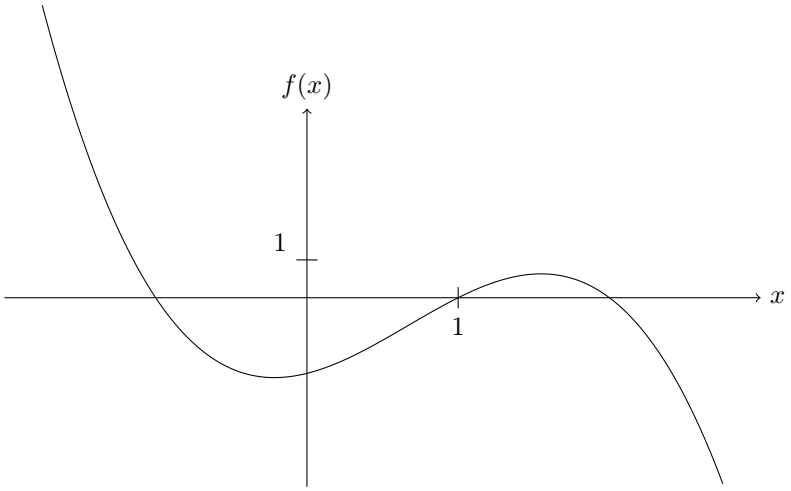
$$\left(e^{\log x}\right)' = e^{\log x} \cdot \log' x = x \log' x,$$

also

$$x \log' x = 1 \text{ und so } \log' x = \frac{1}{x}.$$

Optimierung

Wir haben eine Funktion $f(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2$. Sie sieht so aus:

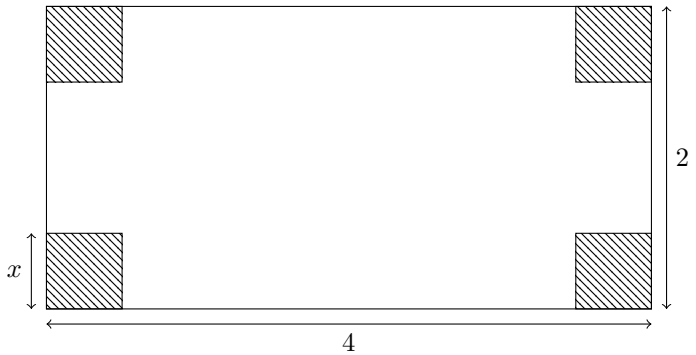


Wir wollen herausfinden, wo im ersten Quadranten die Funktion ihr Maximum hat. Wie sieht die Steigung um das Maximum herum aus? Von links her kommend ist sie positiv und wird immer kleiner, bis sie nach dem Maximum negativ wird. Also muss sie im Maximum 0 sein. Es gilt

$$f \text{ hat ein Maximum in } x \implies f'(x) = 0.$$

Dasselbe gilt natürlich für ein Minimum. Man nennt die Minima und Maxima *Extremalwerte* oder *Extrema*. Damit kann man gut Optimierungsaufgaben lösen:

Beispiel. Wir haben einen 2×4-Karton. Wir schneiden von den Ecken Quadrate weg und falten den Rest zu einer (offenen) Kiste. Wie lang müssen die Seiten der Quadrate sein, damit die Kiste möglichst viel fasst?



Das Volumen der Kiste ist

$$V(x) = x(2-2x)(4-2x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x.$$

Wir wollen V maximieren. Also müssen wir die Nullstellen von $V'(x)$ finden.

$$\begin{aligned} V'(x) &= 12x^2 - 24x + 8 \\ 12x^2 - 24x + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + \frac{2}{3} &= 0 \end{aligned}$$

und daraus erhalten wir

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - \frac{8}{3}}}{2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

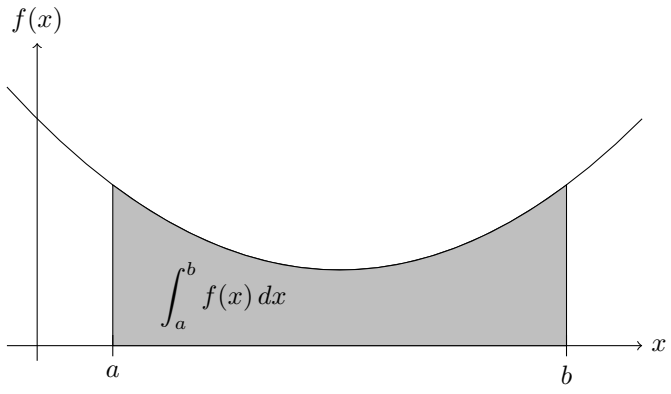
Da ein negatives Volumen keinen Sinn macht, bleibt die Lösung $x = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

12 Integration

Beim *Integrieren* sucht man für eine Funktion f eine andere Funktion F so dass $F' = f$. F heisst dann *Stammfunktion* von f. Hat man eine Stammfunktion F gefunden, so ist $F + C, C \in \mathbb{R}$, ebenso eine Stammfunktion, da die Konstante C beim Ableiten verschwindet. Wenn es also mindestens eine Stammfunktion gibt, so gibt es unendlich viele. Man nennt die Menge der Stammfunktionen das *unbestimmte Integral* von f und notiert sie durch

$$\int f(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Ursprünglich wurde das Integral beim Bestimmen von Flächen, die unter dem Graphen einer Funktion f und zwischen zwei vertikalen Achsen $x = a$ und $x = b$ liegen, gefunden.



Diese Fläche bezeichnet man mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

und nennt dies ein *bestimmtes Integral*. a, b sind die *Integrationsgrenzen*, $f(x)$ der *Integrand* und x die *Integrationsvariable*. Es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b\,.$$

Integrationsregeln

$$\begin{aligned}\int (f+g)\,\mathrm{dx} &= \int f\,\mathrm{dx} + \int g\,\mathrm{dx},\\ \int c\cdot f\,\mathrm{dx} &= c\int f\,\mathrm{dx}, \quad \text{für alle } c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Diese und die folgenden Regeln ergeben sich daraus, dass wir bei der Integration die Differentiation umkehren wollen!

$$\begin{aligned}\int x^n\,\mathrm{dx} &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{für } n\neq -1,\\ \int \sin x\,\mathrm{dx} &= -\cos x + C,\\ \int \cos x\,\mathrm{dx} &= \sin x + C,\\ \int e^x\,\mathrm{dx} &= e^x + C,\\ \int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} &= \log|x| + C.\end{aligned}$$

Beispiel. Wir wollen die Fläche unter dem Graph von $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ zwischen den Nullstellen von f bestimmen. Zuerst suchen wir die Nullstellen von f. Wir finden $x_1 = 1, x_2 = 3$. Wir müssen

$$\int_1^3 f(x)\,\mathrm{dx}$$

berechnen.

$$\begin{aligned}\int_1^3 f(x)\,\mathrm{dx} &= \int_1^3 -x^2+4x-3\,\mathrm{dx}\\ &= \int_1^3 -x^2\,\mathrm{dx}+\int_1^3 4x\,\mathrm{dx}+\int_1^3 -3\,\mathrm{dx} = -\int_1^3 x^2\,\mathrm{dx}+4\int_1^3 x\,\mathrm{dx}-3\int_1^3 1\,\mathrm{dx}\\ &= -\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3+4\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3-3\,[x]_1^3 = \left[-\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}-3x\right]_1^3\\ &= (-9+18-9)-(-\frac{1}{3}+2-3) = 0-(-\frac{4}{3})\\ &= \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Partielle Integration

Produkte können wir mit der Formel für partielle Integration berechnen. Es gilt

$$\int_a^b fg\,\mathrm{dx} = [Fg]_a^b - \int_a^b Fg'\,\mathrm{dx},$$

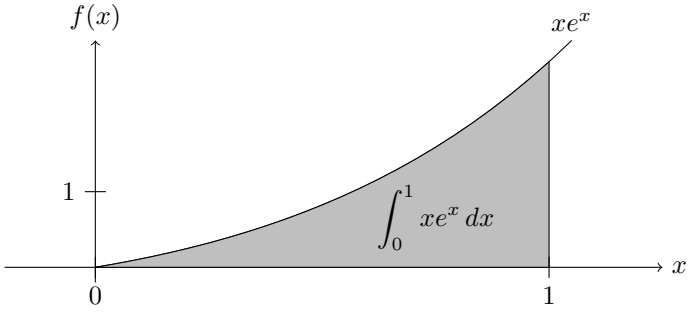
wobei F natürlich eine Stammfunktion von f ist. Dies ist das Analogon für die Produktformel der Differentialrechnung.

Beispiel. Als erstes Beispiel betrachten wir

$$\int_0^1 xe^x\,\mathrm{dx}\,.$$

Mit der partiellen Integration gilt

$$\int_0^1 xe^x\,\mathrm{dx} = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{dx} = e-[e^x]_0^1 = e-e+1 = 1.$$



Beispiel. Wir wollen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \,\mathrm{du}$$

berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \,\mathrm{du} \;&=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \cdot \cos u \,\mathrm{du} \;= \big[\sin u \cdot \cos u\big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \cdot (-\sin u)\,\mathrm{du} \\ &= (\sin\frac{\pi}{2} \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} - \underbrace{\sin 0}_{=0}\cos 0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u \,\mathrm{du} \\ &= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos^2 u \,\mathrm{du} \;=\; \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \,\mathrm{du}\,.\end{aligned}$$

Dies führt auf

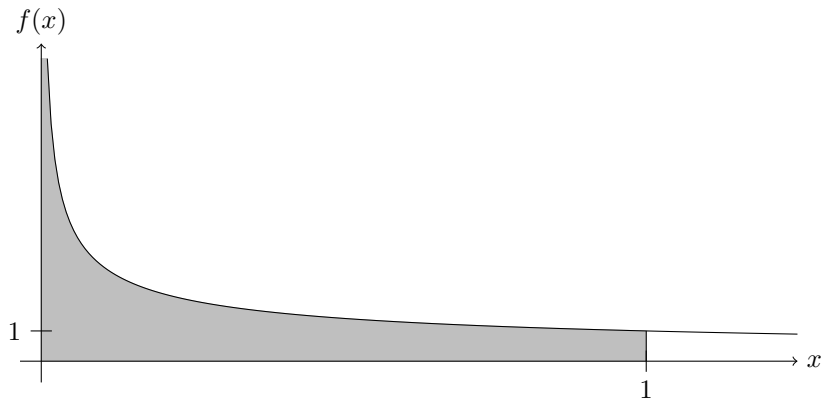
$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \,\mathrm{du} \;=\; \frac{\pi}{2}$$

und so

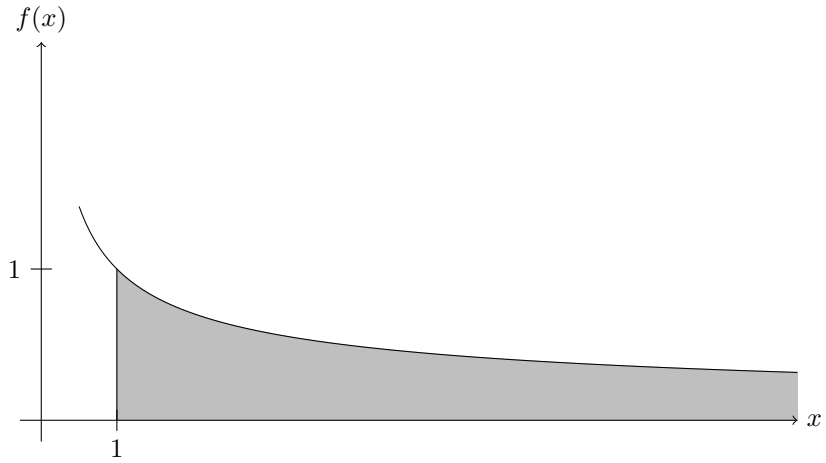
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \,\mathrm{du} \;=\; \frac{\pi}{4}.$$

Uneigentliche Integrale

Manchmal will man Flächen bestimmen, deren Integrationsgrenzen nicht zum Definitionsbereich des Integranden gehören. Es gibt zwei Fälle. Einerseits können a oder b ganz normale Zahlen sein, die einfach nicht in $\mathbb{D}$ sind, andererseits kann $a = -\infty$ oder $b = \infty$ sein.



(a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$: Der Integrand nimmt bei 0 keinen Wert an.



(b) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$: Der Integrand geht bis $+\infty$.

In beiden Fällen berechnet man das Integral, in dem man statt der kritischen Integrationsgrenze eine Folge in $\mathbb{D}$ nimmt, die gegen diese Grenze konvergiert. Wir illustrieren dieses Vorgehen anhand eines Beispiels (dieses Beispiel entspricht dem Bild (a) von oben).

Beispiel.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{dx} := \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{dx},$$

denn 0 ist ja nicht in $\mathbb{D}$ von $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Es gilt

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{dx} = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{dx} = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = 2 - 2\sqrt{\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 2.$$

Integrale dieser Formen nennt man *uneigentliche Integrale*.

Substitutionsregel

Manchmal lässt sich ein kompliziertes Integral durch Ersetzen der Integrationsvariable mit einer Funktion vereinfachen. Dies geschieht nach der Formel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_c^d f(g(u))g'(u)\,\mathrm{du}, \tag{1}$$

wobei c, d so, dass $g(c) = a$, $g(d) = b$. Man kann die Gleichung auch umkehren, wenn dies nützlich ist.

Beispiel. Wir möchten mittels Substitution das folgende Integral berechnen:

$$\int_0^1 \frac{4u+3}{2u^2+3u+1}\,\mathrm{du}\,.$$

Es ist

$$\left(2u^2+3u+1\right)' = 4u+3,$$

daher wählen wir $g(u) = 2u^2+3u+1$ und $f(x) = \frac{1}{x}$ und erhalten nach Anpassung der Grenzen

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{4u+3}{2u^2+3u+1}\,\mathrm{du} &= \int_0^1 f(g(u))g'(u)\,\mathrm{du} \\ &= \int_1^6 f(x)\,\mathrm{dx} = \int_1^6 \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \log(6) - \log(1) = \log(6).\end{aligned}$$

Beispiel. Wir wollen

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx}$$

berechnen. Wir versuchen es mit der Substitution $x = \sin u$. Gemäss (1) gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,\mathrm{du} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 u}\cos u\,\mathrm{du} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,\mathrm{du} = \frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

gemäss unserem Beispiel für die partielle Integration. Man beachte, wie wir die Integrationsgrenzen angepasst haben:

$$1 = \sin\frac{\pi}{2}, \quad 0 = \sin 0.$$

Beispiel. In manchen Fällen sind wir an unbestimmten Integralen interessiert. Wir betrachten folgendes Beispiel:

$$\int 7e^{\sin(u)}\cos(u)\,\mathrm{du}\,.$$

Wir beobachten, dass $\cos(u)$ die Ableitung von $\sin(u)$ ist. Also wählen wir $f(x) = e^x$ und $g(u) = \sin(u)$. Entsprechend folgt nach Substitution mit $g(u) := x$, $g'(u)\,\mathrm{du} = \mathrm{dx}$,

$$\int 7e^{\sin(u)}\cos(u)\,\mathrm{du} = 7\int e^x\,\mathrm{dx} = 7e^x + C.$$

Allerdings suchen wir eine Stammfunktion, die abhängig von u ist, nicht von x. Also ersetzen wir x wieder durch $\sin(u)$ und erhalten

$$\int 7e^{\sin(u)}\cos(u)\,\mathrm{du} = 7e^{\sin(u)} + C.$$

13 Lösen von Gleichungssystemen

Zu Beginn des Kurses haben wir folgendes Gleichungssystem gelöst:

$$2x + 3y = 5 \tag{1}$$
$$x + 2y = 4 \tag{2}$$

In diesem Beispiel haben wir genau eine Lösung erhalten. Ist dies immer so? Um diese Frage zu beantworten betrachten wir das Problem geometrisch.

Verschiedene Lösungsmengen

Wir haben ein Gleichungssystem

$$ax + by = e \tag{3}$$
$$cx + dy = f \tag{4}$$

Beide Gleichungen können zu Geradengleichungen der Form $y = mx + b$ umgeformt werden, z.B. (3) zu $y = -\frac{a}{b}x + \frac{e}{b}$. (Wir setzen hier $b \neq 0$ voraus, denn mit $b = 0$ wäre die Aufgabe einfach zu lösen .) Ihre jeweilige Lösungsmenge ist also eine Gerade. Die gemeinsamen Lösungen sind also die Punkte, die auf beiden Geraden liegen.