

Lösung 12

1. (a) Seien $y = g(x) = x^2 + 1$ und $f(y) = \frac{1}{y^2}$. Dann gelten $g'(x) = 2x$ und

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{g'(x)}{g^2(x)} dx = \int f(g(x))g'(x) dx \\ &= \int f(y) dy = -\frac{1}{y} + c = -\frac{1}{x^2 + 1} + C. \end{aligned}$$

- (b) Substitution $u := x + 7$:

$$\int (x + 7)^5 dx = \int u^5 du = \frac{1}{6}u^6 + c = \frac{1}{6}(x + 7)^6 + c.$$

- (c) $F(x) = \int \frac{x+5}{1-x^2} dx = 2 \log(|x+1|) - 3 \log(|1-x|) + c.$

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 (\sin x)' dx$$

Nun können wir die Substitutionsregel anwenden. Mit $t = \sin x$ führt dies auf

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

3. $\int_{-1}^1 \frac{3x}{x^2+1} dx = \frac{3}{2}(\log(2) - \log(2)) = 0$

4. (a) $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

- (b) Nullstelle ist a und somit ist die Fläche gegeben durch

$$\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \cos^2 t dt = ab \frac{\pi}{4}$$

Dabei haben wir die Substitution $x = a \sin t$ verwendet.

- (c) Für den Flächeninhalt der Ellipse gilt $A = \pi ab$.

5. (a) Wir erweitern mit $\frac{5}{5}$

$$\int_{\frac{3}{5}}^a e^{5x-3} dx = \frac{1}{5} \int_{\frac{3}{5}}^a e^{5x-3} 5 dx$$

und können Substitution mit $g(x) = 5x - 3$ nutzen

$$\int_{\frac{3}{5}}^a e^{5x-3} dx = \frac{1}{5} \int_0^{5a-3} e^u du = \frac{1}{5} (e^{5a-3} - 1).$$

- (b) Ähnlich zu der Aufgabe 7, Blatt 11, nutzen wir partielle Integration

$$\int x^2 \log x dx = \frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{3} \int x^2 dx + C = \frac{1}{9} x^3 (3 \log x - 1) + C.$$

(c)

$$\begin{aligned}\int x^2(1 - \log x) \, dx &= \int x^2 \, dx - \int x^2 \log x \, dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^3(3 \log x - 1) + C \\ &= \frac{1}{9}x^3(4 - 3 \log x) + C\end{aligned}$$

Auswertung bei 1 und 2 ergibt

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2(1 - \log x) \, dx &= \frac{1}{9}2^3(4 - 3 \log 2) - \frac{1}{9}1^3(4 - 3 \log 1) \\ &= \frac{1}{9}(7 \cdot 4 - 3 \cdot 2^3 \log 2) = \frac{4}{9}(7 - 6 \log 2)\end{aligned}$$

(d) Substitution mit $g(x) = x^2$

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \sin(x^2) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(u) \, du \\ &= - \left[\frac{1}{2} \cos(u) \right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2}(-1 - 1) = 1\end{aligned}$$

(e) Substitution mit $g(x) = 1 - e^x$

$$\int \frac{e^x}{1 - e^x} \, dx = -1 \int \frac{1}{1 - e^x} (-e^x) \, dx = \int \frac{1}{u} \, du = \log u + C = \log(1 - e^x) + C$$

(f) Wir nutzen Teil (d) und erhalten zunächst mit der partiellen Integration

$$\int 2x^3 \sin(x^2) \, dx = \int x^2 2x \sin(x^2) \, dx = x^2 \cdot \underbrace{(-\cos(x^2))}_{= \int 2x \sin(x^2) \, dx} - \int 2x \cos(x^2) \, dx + C.$$

Für $\int 2x \cos(x^2) \, dx$ ergibt sich wiederum analog zum Teil (d)

$$\int 2x \cos(x^2) \, dx = -\sin(x^2) + C.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\int 2x^3 \sin(x^2) \, dx = \sin(x^2) - x^2 \cos(x^2) + C.$$