

Lösung 20

1. Unabhängigkeit bedeutet

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B).$$

Die folgenden Wahrscheinlichkeiten können mit Hilfe eines Wahrscheinlichkeitsbaums berechnet werden.

- (a) $P(„1. Kugel weiss“) = \frac{1}{2}$, $P(„2. Kugel weiss“) = \frac{1}{2}$ und $P(„1. und 2. Kugel weiss“) = \frac{1}{4}$. Und es gilt

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Also sind die Ereignisse unabhängig voneinander.

- (b) $P(„1. Kugel weiss“) = \frac{1}{2}$, $P(„2. Kugel weiss“) = \frac{1}{2}$ und $P(„1. und 2. Kugel weiss“) = \frac{1}{6}$. Und es gilt

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \neq \frac{1}{6}$$

Also sind die Ereignisse nicht unabhängig voneinander.

2. Gegeben seien die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

- $T = \text{Test positiv}$ und $T^c = \text{Test negativ}$
- $K = \text{hat Krebs}$ und $K^c = \text{hat keinen Krebs}$
- $P[T|K] = 0.96$ und $P[T^c|K^c] = 0.94$
- $P[K] = 0.007$

Es gilt

- $1 - P[K] = P[K^c] = 0.993$
- $P[T] = P[T \cap K] + P[T \cap K^c] = P[T|K]P[K] + P[T|K^c]P[K^c]$
 $= 0.96 \cdot 0.007 + 0.06 \cdot 0.993 = 0.0663$
- (a) $P[K|T] = \frac{P[K \cap T]}{P[T]} = \frac{P[T|K]P[K]}{P[T]} = \frac{0.96 \cdot 0.007}{0.0663} \approx 10.1357466063348\%$
- (b) $P[K|T^c] = \frac{P[T^c|K]P[K]}{P[T^c]} = \frac{(1-P[T|K])P[K]}{1-P[T]} = \frac{(1-0.96) \cdot 0.007}{1-0.0663} = 0.0299882189139981\%$

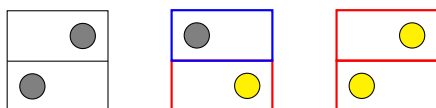
3. Gegeben seien die folgenden Daten:

- $A = \text{Amerikaner}$
- $T = \text{Tomatensaft}$
- $P[A] = P[A^c] = \frac{1}{2}$
- $P[T|A] = \frac{1}{8}$ und $P[T|A^c] = \frac{1}{80}$
- $P[T] = P[T|A]P[A] + P[T|A^c]P[A^c] = \frac{1}{16} + \frac{1}{160} = \frac{11}{160}$

Dann gilt $P[A|T] = \frac{P[T|A]P[A]}{P[T]} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{160}{11} = \frac{10}{11} \approx 90.9\%$.

4. $M_1, M_2 = \text{Münzen}$, $S = \text{Silbermünze}$, $G = \text{Goldmünze}$

$$P[M_2 = S|M_1 = G] = \frac{1}{3}$$



5. $K=\text{Kind}$, $T=\text{Tochter}$, $P[K = T] = \frac{1}{2}$

(a) $P[K_1 = K_2 = T] = P[K_1 = T]P[K_2 = T] = \frac{1}{4}$

(b) $P[K_2 = T|K_1 = T] = P[K_2 = T] = \frac{1}{2}$ (stochastisch unabhängig)

(c) $P[K_1 = K_2 = T|\text{hat mind. eine Tochter}]$

$$= \frac{|\{(K_1 = T, K_2 = T)\}|}{|\{(K_1 = T^c, K_2 = T), (K_1 = T, K_2 = T^c), (K_1 = T, K_2 = T^c)\}|} = \frac{1}{3}$$