

Übung 1

1. Berechne $((4/3 + 5/2) \cdot 6/5) - 2/5) \cdot 5/2$.
2. Berechne (a) $\frac{1}{(\frac{2}{3})}$, (b) $\frac{1}{(\frac{2}{3})}$ und (c) $(\frac{1}{2})$.
3. Vereinfache: (a) $(\frac{4}{xy} + \frac{3}{yz})(\frac{4z}{xy} - \frac{2}{y})$, (b) $\frac{\frac{x}{y} - \frac{z}{x}}{\frac{2}{x} + \frac{z}{y}}$ und (c) $\frac{x}{1 - \frac{1}{1-x}}$.
4. Beweise, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, das heisst es gibt keine ganzen Zahlen a und b mit $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

Tip: Nehme an, dass $\frac{a}{b}$ soweit wie möglich gekürzt ist. Quadriere die Gleichung und folgere, dass a gerade ist. Also lässt sich a wie folgt schreiben: $a = 2n$ für irgendeine natürliche Zahl n . Was bedeutet dies für b ? Ist b gerade oder ungerade? Leite einen Widerspruch her.

5. Grösser, kleiner oder gleich? (a) $\frac{5}{14}$ und $\frac{6}{21}$, (b) $\frac{27}{5}$ und $\frac{16}{3}$, (c) $\frac{3}{13}$ und $\frac{21}{91}$.
6. Zeige, dass folgende Potenzgesetze gelten:

$$(a) \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}, (b) a^{-1} = \frac{1}{a}, (c) \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

7. Wie viele Lösungen hat die Gleichung $2x^2 - (2\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0$ in (a) $\mathbb{Z}$, (b) $\mathbb{Q}$ und in (c) $\mathbb{R}$?
8. Löse folgende quadratische Gleichungen: (a) $x^2 + x - 6 = 0$, (b) $-2x^2 - 4x - 2 = 0$, (c) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{34}{3} = 0$, (d) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ und (e) $x^2 - 4x - 3 = 0$. Versuche dies zuerst mit Vieta und sonst mit der Lösungsformel.
9. Für welche a hat $(x - 1)^2 + 1 = ax$ genau eine Lösung?
10. Für welche Werte von a hat die Gleichung $x^2 - (|a| - 3)x + 1 = 0$ genau zwei verschiedene Lösungen?
11. Löse die folgenden Gleichungssysteme. Überlege dabei, welches der Verfahren sich am besten eignet.

$$(a) \begin{cases} 0 = 2y + 4x - 2 \\ y = -4x + 6 \end{cases}, (b) \begin{cases} y = 2x \\ y = -4x + 6 \end{cases}, (c) \begin{cases} 0 = 2x + 2y - 5 \\ 0 = 3x - y + 1 \end{cases}$$

12. Berechne $\sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$.
13. Vereinfache: (a) $(-1 + a)^2 - (1 - a)^2$, (b) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$
14. Vereinfache: (a) $\frac{3a^{n+1} \cdot 6x^{n+7} \cdot 9b^{x+1}}{3x^n \cdot 2b^{x+1} \cdot 3a}$, (b) $\sqrt[3]{a^3 \cdot \sqrt{a^8}}$.
15. Beweise, analog zu Aufgabe 4, dass $\sqrt{p}$, mit p prim, keine rationale Zahl ist. Erinnerung: Eine Zahl p heisst *prim* wenn sie genau zwei Teiler hat.