Übung 12

1. Bestimme mittels Substitution eine Stammfunktion von
   a) $\frac{2x}{(x^2+1)^2}$
   b) $(x+7)^5$
   c) $f(x) = \frac{x+5}{(1-x^2)}$ (**Tipp:** Gehe wie in Aufgabe 4 auf Übungsblatt 5 vor, um die Funktion in eine einfacher integrierbare Form zu bringen.)
2. Berechne $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \,\mathrm{dx}$ (**Tipp:** Substitution $t = \sin x$).
3. Berechne das bestimmte Integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3x}{x^2+1}\,\mathrm{dx}$.
4. Die Punkte einer Ellipse sind gegeben durch
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
   a) Finde eine Funktion deren Graph die Punkte der Ellipse im 1. Quadranten sind.
   b) Finde die Fläche zwischen Graph und x-Achse, indem du das Integral von $x = 0$ bis $x = s$ berechnest, wobei s die Nullstelle der Funktion ist. Verwende dabei die Substitution $x = a \sin t$.
   c) Berechne die Fläche der Ellipse.
5. Berechne die folgenden Integrale. Entscheide zwischen Substitution und partieller Integration:
   a) $\int\limits_{3/5}^{a} e^{5x-3}\,\mathrm{dx}$
   b) $\int x^2 \log x \,\mathrm{dx}$
   c) $\int\limits_{1}^{2} x^2(1-\log(x))\,\mathrm{dx}$
   d) $\int\limits_{0}^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)\,\mathrm{dx}$
   e) $\int \frac{e^x}{1-e^x}\,\mathrm{dx}$
   f) $\int 2x^3 \sin(x^2)\,\mathrm{dx}$ (**Tipp:** $2x^3 = 2x \cdot x^2$)