

## Lösung 1

1.  $((\frac{4}{3} + \frac{5}{2}) \cdot \frac{6}{5}) - \frac{2}{5} = ((\frac{8+15}{6} \cdot \frac{6}{5}) - \frac{2}{5}) \cdot \frac{5}{2} = (\frac{23}{5} - \frac{2}{5}) \cdot \frac{5}{2} = \frac{23}{2} - \frac{2}{2} = \frac{21}{2}$
2. (a)  $\frac{1}{(\frac{2}{3})} = \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{1}{\frac{8}{3}} = 1 : \frac{8}{3} = 1 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$ , (b)  $\frac{1}{(\frac{5}{4})} = \frac{1}{(\frac{2}{3 \cdot 4})} = \frac{1}{(\frac{1}{6})} = 1 : \frac{1}{6} = 1 \cdot 6 = 6$ ,  
 (c)  $\frac{1}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
3. (a)  $(\frac{4}{xy} + \frac{3}{yz})(\frac{4z}{xy} - \frac{2}{y}) = (\frac{4}{xy} \cdot \frac{z}{z} + \frac{3}{yz} \cdot \frac{x}{x})(\frac{4z}{xy} - \frac{2}{y} \cdot \frac{x}{x}) = \frac{4z+3x}{xyz} \cdot \frac{4z-2x}{xy} = \frac{(4z+3x)(4z-2x)}{x^2y^2z}$ ,  
 (b)  $\frac{\frac{x}{y} - \frac{z}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{z}{y}} = \frac{\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{x} - \frac{z}{x} \cdot \frac{y}{y}}{\frac{x}{x} \cdot \frac{y}{y} + \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{x}} = \frac{\frac{x^2-zy}{xy}}{\frac{2y+zx}{xy}} = \frac{x^2-zy}{2y+zx}$ ,  
 (c)  $\frac{x}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x}{\frac{1-x}{1-x} - \frac{1}{1-x}} = \frac{x}{\frac{1-x-1}{1-x}} = x \cdot \frac{1-x}{1-x-1} = x - 1$
4. **Behauptung:**  $\sqrt{2}$  ist keine rational Zahl. (D.h. es gibt keine ganzen Zahlen  $a$  und  $b$ , sodass  $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ .)

**Beweis:** Wir nehmen an, es gäbe ganze Zahlen  $a$  und  $b$ , sodass  $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ . Wir können zusätzlich annehmen, dass  $\frac{a}{b}$  ein vollständig gekürzter Bruch ist. Insbesondere können daher nicht sowohl  $a$  als auch  $b$  gerade sein. (Sonst könnte man den Bruch mit 2 kürzen.) Aus  $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$  folgt  $\frac{a^2}{b^2} = 2$  und somit  $a^2 = 2b^2$ . Daher ist  $a^2$  und somit auch  $a$  gerade (bitte selber nachprüfen). Es gibt also eine ganze Zahl  $n$ , sodass  $a = 2n$ . Damit gilt  $2b^2 = a^2 = 4n^2$ , woraus  $b^2 = 2n^2$  folgt. Daher ist auch  $b^2$  und somit  $b$  gerade. Dies widerspricht unserer Annahme, welche somit falsch ist und daher ist  $\sqrt{2}$  keine rationale Zahl. □

5. (a)  $\frac{6}{21} = \frac{2}{7} < \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  und  $\frac{5}{14} > \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{5}{14} > \frac{6}{21}$ , (b)  $\frac{27}{5} > \frac{16}{3}$ , (c)  $\frac{3}{13} = \frac{21}{91}$
6. (a)  $(a^{\frac{1}{m}})^m = a^{\frac{m}{m}} = a$   
 (b)  $a^{-1} \cdot a^1 = a^{-1+1} = a^0 = 1$   
 (c)  $ab^{-1} + cd^{-1} = ab^{-1}dd^{-1} + cd^{-1}bb^{-1} = (ad + bc)b^{-1}d^{-1} = \frac{ad+bc}{bd}$
7. Lösungen der Gleichung  $2x^2 - (2\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0$ :

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{2\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2(2 \cdot \sqrt{2}) + 1 + 4(2 \cdot \sqrt{2})}}{4} \\ &= \frac{2\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2(2 \cdot \sqrt{2}) + 1}}{4} \\ &= \frac{2\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{((2\sqrt{2}) + 1)^2}}{4} \\ &= \frac{2\sqrt{2} - 1 \pm (2\sqrt{2} + 1)}{4}, \end{aligned}$$

d.h.  $x_1 = -\frac{1}{2}$  und  $x_2 = \sqrt{2}$ . Daher lauten die Lösungen der Aufgabe: (a) 0, (b) 1, (c) 2.

8. (a)  $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1+4 \cdot 6}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = 3$  oder  $-2 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -3$ ,  
 (b)  $-2x^2 - 4x - 2 = -2 \cdot (x^2 + 2x + 1) = -2 \cdot (x+1)^2 \Rightarrow x_{1,2} = -1$  (doppelte Nullstelle),  
 (c)  $x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 - 34} = -5 \pm 3\sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \Rightarrow$  keine reellen Lösungen,  
 (d)  $y := x^2 \Rightarrow x^4 - 13x^2 + 36 = y^2 - 13y + 36 = 0$   
 $\Rightarrow y_{1,2} = \frac{13}{2} \pm \frac{\sqrt{13^2 - 4 \cdot 36}}{2} = 9$  oder  $4 \Rightarrow x \in \{\pm\sqrt{y_1}, \pm\sqrt{y_2}\} = \{-2, 2, -3, 3\}$ , (e)  $2 \pm \sqrt{7}$
9. Diskriminante der Gleichung ist:  $(2+a)^2 - 8$ . Diese ist Null, sobald  $a = \pm 2\sqrt{2} - 2$ . Die Lösung der Gleichung ist dann  $x = \sqrt{2}$ , falls  $a = 2\sqrt{2} - 2$  und  $x = -\sqrt{2}$ , falls  $a = -2\sqrt{2} - 2$

10. Diskriminante  $D = (|a| - 3)^2 - 4 = (|a| - 5)(|a| - 1)$ . Solange  $a < -5$ ,  $-1 < a < 1$  oder  $a > 5$ , gibt es 2 Lösungen.
11. (a)  $x = \frac{5}{2}$ ,  $y = -4$ , (b)  $x = 1$ ,  $y = 2$ , (c)  $x = \frac{3}{8}$ ,  $y = \frac{17}{8}$
12.  $\sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \sqrt{6 - 2} = \sqrt{4} = 2$
13. (a)  $(-1 + a)^2 - (1 - a)^2 = (-(1 - a))^2 - (1 - a)^2 = (1 - a)^2 - (1 - a)^2 = 0$ ,  
 (b)  $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = ((a^2 + b^2) - (a^2 - b^2))((a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)) = 4a^2b^2$
14. (a)  $9a^n x^7$ , (b)  $a^{\frac{7}{3}}$
15. **Bemerkung:** Der Beweis wird analog zum Beweis der Aufgabe 4 geführt und wird deshalb nicht gross kommentiert.

**Behauptung:** Sei  $p$  prim, so ist  $\sqrt{p}$  keine rationale Zahl.

**Beweis:** Annahme:  $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$  ist gekürzter Bruch. Es folgt  $p = \frac{a^2}{b^2}$  und daher teilt  $p$   $a^2$  und daher teilt  $p$   $a$ . (Bitte selber überprüfen). Es gibt nun ein  $n$ , sodass  $a = np$  und daraus folgt  $b^2 = n^2 p$ . Somit teilt  $p$   $b^2$  und daher auch  $b$ . Dies widerspricht der Annahme, dass  $\frac{a}{b}$  gekürzt ist. □