Lösung 11

1.

$$\int_0^e \log x \, dx = \int_0^e 1 \cdot \log x = [x \log x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} \, dx = \underbrace{(e \log e)}_{=e} - \underbrace{(1 \log 1)}_{=0} - (e-1) = 1$$

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx = [\sin x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x \, dx$$

Daraus folgt

$$2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx = 1 \implies \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}$$

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos x \, dx = 0$. Man kann entweder dreimal partielle Integration anwenden oder feststellen, dass der Graph von $x^3 \cos x$ punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs ist, woraus direkt folgt, dass das Integral verschwindet.

4.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} + 1 = 1$$

5. Zwei Mal partielle Integration (x^2 ableiten und e^{2x} integrieren) führt zu

$$\int x^2 e^{2x} \, dx = \frac{1}{4}(2x^2 - 2x + 1)e^{2x} + c$$

Also ist gesucht $F(x) = \frac{1}{4}(2x^2 - 2x + 1)e^{2x} - \frac{e^2}{4}$

6.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{kx+k}{x^3} \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left[-\frac{kx+k}{2x^2} \right]_1^n - \int_1^n -\frac{k}{2x^2} \, dx \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{kx+k}{2x^2} - \frac{k}{2x} \right]_1^n = \frac{3k}{2} \end{aligned}$$

7. Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} \int_1^e x \log x \, dx &= \left[\frac{1}{2} x^2 \log x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \log x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \log x \right]_1^e - \frac{1}{4} [x^2]_1^e = \frac{1}{2} (e^2 - 0) - \frac{1}{4} (e^2 - 1) = \frac{e^2 + 1}{4} \end{aligned}$$