

Lösung 13

1. Eine Gerade ist gegeben durch $y = mx + b$ für $m, b \in \mathbb{R}$. Für $-12x + 4y = 8$ erhalten wir die Gerade

$$-3x + y = 2 \quad \text{bzw.} \quad y = 3x + 2.$$

2. **Fall 1** $a \neq c$: Die Geraden schneiden sich im Punkt $\left(\frac{d-b}{a-c}, \frac{ad-bc}{a-c}\right)$.

Fall 2 $a = c$ und $b = d$: Die Geraden schneiden sich nicht, sondern fallen aufeinander.

Fall 3 $a = c$ und $b \neq d$: Die Geraden schneiden sich nicht, sondern sie sind parallel.

3. (a) Es gibt nur die eine Lösung $(x, y) = (2, 1)$:

$$\begin{array}{rclclclclcl} 2x + y & = & 5 & \Rightarrow & 6x + 3y & = & 15 & \Rightarrow & 11y & = & 11 & \Rightarrow & y & = & 1 \\ 3x + 7y & = & 13 & \Rightarrow & 6x + 14y & = & 26 & \Rightarrow & 11y & = & 11 & \Rightarrow & x & = & 2 \end{array}$$

- (b) Es gibt keine Lösung:

$$\begin{array}{rclclcl} 2x + y & = & 5 & \Rightarrow & 10x + 5y & = & 25 \\ 10x + 5y & = & 11 & \Rightarrow & 10x + 5y & = & 11 \end{array}$$

- (c) es gibt unendlich viele Lösungen, sie haben die Form $(x, y) = (x, -3x + 6)$:

$$\begin{array}{rclclcl} 3x + y & = & 6 & \Rightarrow & 3x + y & = & 6 \\ 9x + 3y & = & 18 & \Rightarrow & 3x + y & = & 6 \end{array} \Rightarrow y = -3x + 6, \quad x \in \mathbb{R}$$

4. (a) Die Lösungsmenge ist eine Gerade, gegeben durch die Gleichung $x + z = 1$ wobei $y = 0$:

$$\begin{array}{rclclcl} x + y + z & = & 1 & \Rightarrow & y & = & 0 \\ x + 2y + z & = & 1 & \Rightarrow & y & = & 0 \end{array} \Rightarrow x + y + z = x + z = 1 \quad \text{Gerade}$$

- (b) Es gibt keine Lösung:

$$\begin{array}{rclclcl} 2x + y + z & = & 1 & \Rightarrow & -4x - 2y - 2z & = & -2 \\ -4x - 2y - 2z & = & 1 & \Rightarrow & -4x - 2y - 2z & = & 1 \end{array}$$

- (c) Die Lösungsmenge ist eine Ebene, gegeben durch $2x + y + z = 1$:

$$\begin{array}{rclclcl} 2x + y + z & = & 1 & \Rightarrow & -4x - 2y - 2z & = & -2 \\ -4x - 2y - 2z & = & -2 & \Rightarrow & -4x - 2y - 2z & = & -2 \end{array} \Rightarrow 2x + y + z = 1 \quad \text{Ebene}$$

5.

$$\begin{array}{rclclcl} 3x + 6y - 2z & = & 0 & \Rightarrow & 3x + 6y - 2z & = & 0 \\ 4x + 2y + 3z & = & 5 & \Rightarrow & 12x + 6y + 9z & = & 15 \\ 5x - 3y + 4z & = & -4 & \Rightarrow & 10x - 6y + 8z & = & -8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rclcl} 13x + 6z & = & -8 \\ 22x + 17z & = & 7 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rclcl} 286x + 132z & = & -176 \\ 286x + 221z & = & 91 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rclcl} 89z & = & 267 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} z = 3 \quad \text{und} \\ x = -2, \quad y = 2 \end{array}$$

Die Lösung lautet $(x, y, z) = (-2, 2, 3)$.