

Lösung 18

1. a) 1, 5, 10, 10, 5, 1 und es gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

b) $\binom{100}{99} = \frac{100!}{99! \cdot 1!} = 100$, $\binom{2000}{2} = \frac{1999 \cdot 2000}{2} = 1999000$, $\binom{10^6}{10^6} = \frac{10^6!}{0! 10^6!} = 1$

2. $\binom{100}{3} = 161700$

3. $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$

4. $\binom{22}{11} \cdot \binom{22}{11} = 497'634'306'624$

5. $11 \cdot 11 = 11^2 = 121$

6. (höchstens) $\binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$

7. $\binom{6}{3} + 6 \cdot 5 + 6 = 56$

8. $\binom{18}{3} = \frac{16 \cdot 17 \cdot 18}{3!} = 816$

9. $\binom{36}{9} = 94'143'280$

10. (a) $\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = 45$; (b) $\binom{8+10-1}{8} = \binom{17}{8} = 24310$

11. $(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdot \dots \cdot (a+b)}_{n\text{-Faktoren}}$

Wie bekommt man $a^{n-k}b^k$? Indem man aus k Klammern b und aus $n-k$ Klammern a auswählt. Dies ist auf $\binom{n}{k}$ Arten möglich und deshalb ist der Koeffizient von $a^{n-k}b^k$ $\binom{n}{k}$.

12. Beweis (mittels Formel):

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n 1^{n-k} 1^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Beweis (mit vollständiger Induktion): Induktionsverankerung ($n=0$):

$$1 = 2^0 = \binom{0}{0} = 1 \quad \checkmark$$

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) + 1 \\ &= \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} = 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \stackrel{\text{I.V.}}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \end{aligned}$$

Im zweiten Gleichheitszeichen haben wir die Aufgabe 12 von Blatt 17 verwendet. $\square$